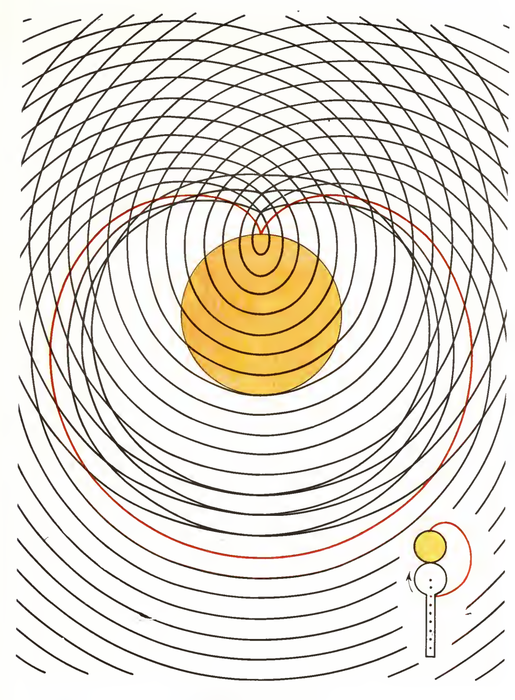
КВАНТ

5
1977

НАУЧНО-ПОПУЛЯРНЫЙ ФИЗИКО-МАТЕМАТИЧЕСКИЙ ЖУРНАЛ
АКАДЕМИИ НАУК СССР И АКАДЕМИИ ПЕДАГОГИЧЕСКИХ НАУК СССР





УЛИТКИ ПАСКАЛЯ

На этом рисунке вы видите семейство кривых, которые называются «улитками Паскаля». Каждая из них получается следующим образом. Нарисуем на плоскости окружность некоторого радиуса и вооружимся вырезанным из бумаги кругом того же радиуса «с ручкой» — планкой, в которой проделаны дырочки. Будем катить без проскальзывания круг снаружи по нарисованной окружности, а в одну из дырочек ручки вставим карандаш. Тогда карандаш опишет как раз улитку Паскаля.

Красная линия на рисунке — кардиоида, которая является одной из улиток Паскаля (карандаш был вставлен в точку на окружности подвижного круга).

О других способах построения и свойствах улитки Паскаля рассказано на с. 36.

Основан в 1970 году



5
1977

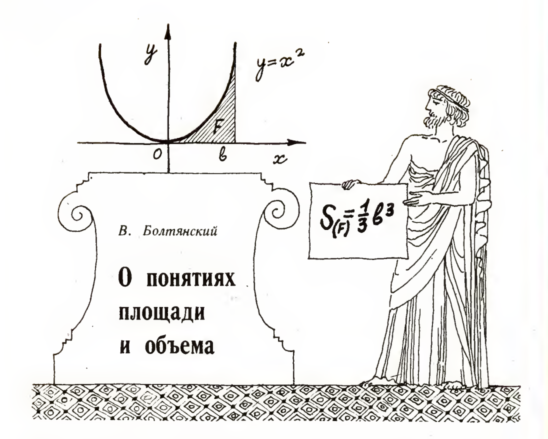
Научно-популярный физико-математический журнал Академии наук СССР и Академии педагогических наук СССР



Издательство „Наука" Главная редакция физико-математической литературы

Что нужно иметь, чтобы найти несколько знаков числа π? Планиметр, чтобы определить площадь круга единичного радиуса? Курвиметр, чтобы измерить длину окружности единичного диаметра? Оказывается, достаточно иметь коробок спичек и лист линованной бумаги (см. первую страницу обложки). Подробно об этом рассказано на с. 43.

В НОМЕРЕ:



В. Болтянский

О понятиях площади и объема

Обычно говорят, что площадь $S(F)$ фигуры F есть число, показывающее, из скольких единиц площади «составляется» эта фигура (за единицу площади берется квадрат, сторона которого равна единице длины). Однако такое наглядное пояснение не может служить точным математическим определением понятия площади. Неясно, например, каким образом из единиц площади «составляется» круг заданного радиуса.

Один из способов уточнения понятия площади основывается на рассмотрении *палетки* — разбиения плоскости на конгруэнтные квадраты. Пусть сторона квадрата палетки имеет длину 1. На рисунке 1 фигура F содержит фигуру, составленную из 9 квадратов палетки, и содержится в фигуре, составленной из 29 квадратов; поэтому $9 \leqslant S(F) \leqslant 29$. Для более точной оценки можно использовать палетку, квадраты которой имеют стороны длиной 1/10 (так что в каждом квадрате прежней палетки содержится 100 квадратов новой палетки). Если, скажем, F содержит фигуру, составленную из 1716 квадратов новой палетки, и содержится в фигуре, составленной из 1925 таких квадратов, то $17{,}16 \leqslant S(F) \leqslant 19{,}25$. Еще раз измельчая палетку (т. е. уменьшая в 10 раз длины сторон квадратов), мы сможем еще точнее оценить $S(F)$ и т. д.

Описанный процесс измерения используется не только для в ы ч и с л е н и я площади, но и для самого *определения* понятия площади. Именно, рассмотрим палетку, у которой длины сторон квадратов равны $1/10^k$. Пусть F содержит фигуру, составленную из a_k квадратов этой палетки, и содержится в фигуре, составленной из b_k таких квадратов (например, выше у нас $a_1 = 1716$, $b_1 = 1925$). Тогда можно сказать, что $\frac{a_k}{10^{2k}}$ есть значение площади фигуры F *с недостатком*, а $\frac{b_k}{10^{2k}}$ — *с избытком*. Неограниченно увеличивая k, мы можем рассмотреть пределы

$$\underline{S}(F) = \lim_{k\to\infty} \frac{a_k}{10^{2k}}, \quad \overline{S}(F) = \lim_{k\to\infty} \frac{b_k}{10^{2k}},$$

первый из которых называется *нижней*, а второй — *верхней площадью* фигуры F.

Если фигура F такова, что эти пределы совпадают, то фигура F называется *квадрируемой*, а число $\underline{S}(F)=\overline{S}(F)$, т. е. совпадающее значение рассмотренных пределов, называется *площадью* фигуры F и обозначается через $S(F)$.

Нетрудно привести пример фигуры, у которой верхняя и нижняя площади *не совпадают*. С этой целью из квадрата площади 1 удалим крест, площадь которого меньше 1/4 (рис. 2, *а*). Затем в каждом из четырех оставшихся квадратов удалим по кресту так, чтобы сумма площадей всех четырех крестов была меньше 1/8 (рис. 2, *б*). Затем удалим 16 крестов с общей площадью меньше 1/16 (рис. 2, *в*) и т. д. Фигуру, которая останется после бесконечного числа удалений крестов, обозначим через Q. Заметим, что общая площадь всех удаленных крестов меньше чем $1/4+1/8+1/16+\ldots+1/2^n+\ldots$, т. е. меньше 1/2. Поэтому оставшуюся фигуру Q невозможно поместить в фигуре площади 1/2, т. е. верхняя площадь фигуры Q больше 1/2. В то же время фигура Q не содержит никакого квадрата (каким бы маленьким он ни был), и потому нижняя площадь фигуры Q равна нулю. Таким образом, $\overline{S}(Q)\neq\underline{S}(Q)$, т. е. фигура Q *неквадрируема*.

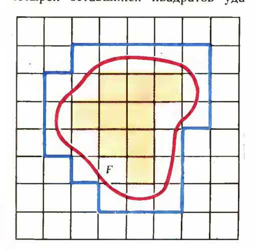


Рис. 1.

Этот пример показывает, что понятие площади применимо не ко всякой фигуре. Однако можно доказать (мы здесь это доказательство приводить не будем), что *всякий многоугольник является квадрируемой фигурой*. Точно так же любая в ы п у к л а я фигура (в частности, круг) квадрируема. Вообще же класс квадрируемых фигур является весьма обширным.

Теперь можно сказать, что площадь S представляет собой *функцию*, заданную на классе всех квадрируемых фигур и принимающую числовые значения, т. е. площадь $S(F)$ каждой фигуры F есть ч и с л о (единица площади предполагается фиксированной).

Используя данное определение площади (с помощью палеток), можно доказать ряд свойств площади. Основными являются следующие четыре свойства:

(α) *функция S неотрицательна*, т. е. $S(F)\geqslant 0$ для любой квадрируемой фигуры F;

(β) *функция S аддитивна*, т. е. если F_1 и F_2 — квадрируемые фигуры, не имеющие общих

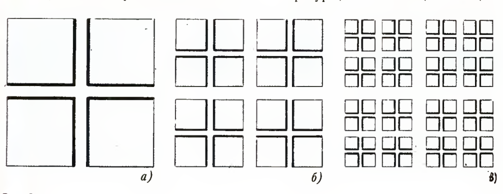


Рис. 2.

внутренних точек, то $S(F_1 \cup F_2) = S(F_1) + S(F_2)$;

(γ) *функция S инвариантна относительно перемещений*, т. е. если $F_1 \cong F_2$, то $S(F_1) = S(F_2)$;

(δ) *единичный квадрат имеет площадь* 1.

После рассмотрения этих свойств наступает поворотный пункт в теории площадей. Дело в том, что справедлива следующая теорема существования и единственности: *на классе всех квадрируемых фигур существует, и притом только одна, функция S, обладающая свойствами* (α), (β), (γ), (δ). Теорема эта играет весьма важную роль. Изложенное выше определение площади (с помощью палеток) можно назвать конструктивным, поскольку площадь определяется с помощью четко описанной конструкции (процесса измерения). Теперь же можно дать другое описание понятия площади; грубо говоря, *площадь* есть «то, что обладает свойствами (α), (β), (γ), (δ)». В самом деле, согласно теореме существования и единственности, кроме площади, нет никакой другой функции, обладающей указанными свойствами. Более точно, мы можем теперь сказать, что площадью называется числовая функция, заданная на множестве всех квадрируемых фигур и удовлетворяющая условиям (α), (β), (γ), (δ). При таком подходе свойства (α), (β), (γ), (δ) доказывать не нужно (они рассматриваются как аксиомы площади), а само определение становится аксиоматическим, а не конструктивным, как прежде.

При аксиоматическом определении площади палетки становятся ненужными *), а все дальнейшие свойства площади выводятся из аксиом (α), (β), (γ), (δ) как теоремы. Например, из аксиом можно вывести, что при $F \supset G$ справедливо неравенство $S(F) \geqslant S(G)$ (свойство *монотонности* площади); что для любых квадрируемых фигур F_1, F_2 справедливо соотношение $S(F_1 \cup F_2) = S(F_1) + S(F_2) - S(F_1 \cap F_2)$; что отношение площадей подобных фигур равно квадрату коэффициента подобия и т. д.

Перейдем, наконец, к вопросу о вычислении площадей. Самым простым методом вычисления площадей, известным еще из глубокой древности, является *метод разложения*. Для уяснения этого метода рассмотрим фигуры F и H, изображенные на рисунке 3. Пунктирные линии разбивают эти фигуры на одинаковое число соответственно конгруэнтных частей, т. е. фигуры F и H равносоставлены. Вообще, две фигуры называются *равносоставленными*, если, разрезав одну из них на конечное

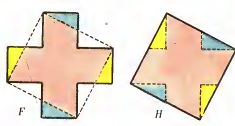


Рис. 3.

число частей, можно (располагая эти части иначе, т. е. рассматривая фигуры, конгруэнтные этим частям) составить из них вторую фигуру.

Из аксиом (β) и (γ) непосредственно следует, что две равносоставленные фигуры *равновелики*, т. е. имеют одинаковую площадь. На этом и основан метод разложения: фигуру, площадь которой нужно вычислить, пытаются разбить на конечное число частей так, чтобы из этих частей можно было составить более простую фигуру (площадь которой уже известна). Например, параллелограмм равносоставлен с прямоугольником, имеющим то же основание и ту же высоту (рис. 4), и потому, зная формулу площади прямоугольника, мы устанавливаем формулу площади параллелограмма. Треугольник равносоставлен с параллелограммом, который имеет то же основание и вдвое меньшую высоту (рис. 5), и это позволяет вычислить площадь треугольника.

Умея вычислять площадь треугольника, легко вычислить площадь

*) Правда, понятие квадрируемости было выше определено с помощью палеток, но этого также можно избежать.

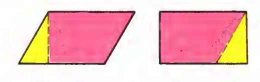


Рис. 4.

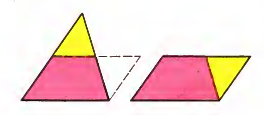


Рис. 5.

любого многоугольника: достаточно разбить его на треугольники и воспользоваться аксиомой (β), т. е. сложить площади этих треугольников. Заметим, что при любом другом способе разбиения на треугольники результат будем тем же самым. Действительно, результат и того и другого вычисления даст однозначно определенное число: площадь $S(F)$ рассматриваемого многоугольника (вот где «работает» теорема существования и единственности!).

Несмотря на простоту и удобство метода разложения, обойтись только этим методом для вычисления площадей различных квадрируемых фигур не удается. Например, вычислить площадь круга этим методом невозможно: как бы мы ни разрезали круг на конечное число частей, составить из них многоугольник (т. е. «более простую» фигуру, площадь которой мы умеем вычислять) не удастся. В связи с этим применяется еще один метод вычисления площадей, называемый *методом исчерпывания*. Этот метод также известен из глубокой древности: его открытие связано с именем Архимеда. Существо метода состоит в следующем. *Рассматривается квадрируемая фигура F и последовательность вложенных в нее квадрируемых фигур G_1, G_2, ...* (рис. 6). *Если часть фигуры F, не заполненная фигурой G_n, имеет площадь, неограниченно уменьшающуюся при $n \to \infty$, то* $S(F) = \lim\limits_{n\to\infty} S(G_n)$. Фигуры G_1, G_2, ... как бы постепенно «исчерпывают» всю площадь фигуры F, и это позволяет вычислить $S(F)$.

Примером применения метода исчерпывания может служить приведенное в учебнике X класса вычисление площади круга. В этом случае фигурами G_1, G_2, ... являются вписанные в круг F правильные многоугольники, каждый из которых имеет вдвое большее число сторон, чем предыдущий (рис. 7). Равенство $S(F) = \lim\limits_{n\to\infty} S(G_n)$ и позволяет вычислить площадь круга. Архимед применил метод исчерпывания не только для вычисления площади круга, но также для вычисления площади сегмента параболы (рис. 8).



Рис. 6.

Наиболее универсальным методом вычисления площади является применение *первообразной*. Пусть на координатной плоскости задана замкнутая линия, не пересекающая сама себя; фигуру, ограниченную этой линией, обозначим через F. Проекция фигуры F на ось абсцисс представляет собой некоторый отрезок $[a, b]$. Для простоты предположим, что для любой внутренней точки x отрезка $[a, b]$ прямая, параллельная оси ординат и проходящая через эту точку, пересекает фигуру F по отрезку (рис. 9); длину этого отрезка обозначим через $f(x)$. Далее,

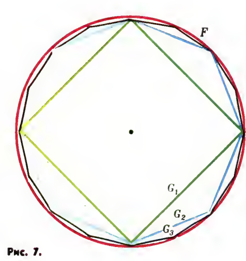


Рис. 7.

Рис. 8.

через $S(x)$ обозначим площадь той части фигуры F, которая расположена л е в е е проведенной через точку x прямой.

Нетрудно доказать, что функция S является первообразной для f на отрезке $[a, b]$, т. е. $S'(x) = f(x)$ при $x \in]a, b[$. В самом деле, пусть ε — произвольное положительное число, меньшее $f(x)$. На прямой, параллельной оси ординат и проходящей через точку x, возьмем точки M, N, P, Q, отстоящие на $\varepsilon/2$ от концов отрезка, по которому взятая прямая пересекает фигуру F (рис. 10). Точки M, Q расположены вне фигуры F, а N, P — внутренние точки этой фигуры. Следовательно, существует такое $\delta > 0$, что отрезки длины 2δ, параллельные оси абсцисс и имеющие середины в точках M, N, P, Q, расположены: первый и последний — вне фигуры F, а второй и третий — внутри нее. Пусть теперь Δx — положительное число, меньшее δ. Разность $\Delta S(x) = S(x+\Delta x) - S(x)$ равна площади заштрихованной на рисунке 10 фигуры. Эта площадь заключена между площадями прямоугольников $NLTP$ и $MKRQ$, т. е.

$$(f(x) - \varepsilon)\,\Delta x < \Delta S(x) < (f(x) + \varepsilon)\,\Delta x.$$

Отсюда

$$f(x) - \varepsilon < \frac{\Delta S(x)}{\Delta x} < f(x) + \varepsilon \qquad (*)$$

при $0 < \Delta x < \delta$.

Аналогично проверяется, что полученное неравенство выполняется

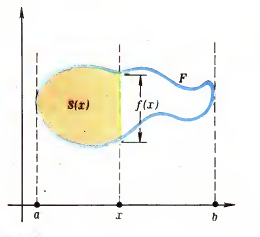


Рис. 9.

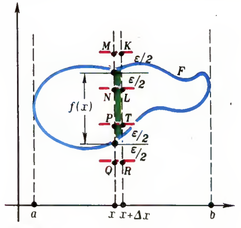


Рис. 10.

и для всех отрицательных Δx, если только $-\delta < \Delta x < 0$. Таким образом, при любом $\varepsilon > 0$ найдется такое $\delta > 0$, что при $0 < |\Delta x| < \delta$ выполняется неравенство (*). По определению предела это означает, что

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta S(x)}{\Delta x} = f(x),$$

т. е.

$$S'(x) = f(x).$$

Доказанное равенство позволяет вычислить площадь фигуры F. Пусть φ — какая-нибудь первообразная для функции f. Так как S — также первообразная для этой функции, то φ и S отличаются на константу, т. е. существует такое число c, что $\varphi(x) = S(x) + c$ для любого $x \in [a, b]$. Следовательно,

$\varphi(b) - \varphi(a) = (S(b) + c) - (S(a) + c) = S(b) - S(a) = S(F)$

(поскольку $S(a) = 0$, а $S(b)$ есть площадь всей фигуры F). Итак, *если φ — какая-нибудь первообразная для функции f, то разность $\varphi(b) - \varphi(a)$ равна площади фигуры F*, т. е. $S(F) = \int\limits_a^b f(x)\,dx$.

Если, например, F представляет собой «криволинейный треугольник», ограниченный параболой $y = x^2$ и прямыми $y = 0$, $x = b$ (рис. 11), то прямая, которая проходит через точку x отрезка $[0, b]$ и параллельна оси ординат, высекает из этого «треугольника» F отрезок длины x^2, т. е. в данном случае $f(x) = x^2$. Для функции $f(x) = x^2$ одной из первообразных является функция $\varphi(x) = \frac{1}{3}x^3$. Следовательно, площадь фигуры F находится по формуле

$$S(F) = \varphi(b) - \varphi(0) = \frac{1}{3}b^3.$$

Заметим, что, вычитая из площади прямоугольника $ABCD$ (рис. 12) удвоенную площадь «треугольника» F, мы получаем площадь сегмента параболы, которая, таким образом, оказывается равной $\frac{4}{3}b^3$. Как видите, с помощью первообразной очень просто получается тот результат, который Архимед выводил с помощью сложного рассуждения, основанного на использовании метода исчерпывания *). Сегодняшние школьники знают намного больше того, что было известно великому Архимеду!

Заканчивая рассказ о понятии площади, рассмотрим так называемый *принцип Кавальери***). Пусть,

*) Подробно об этом см. в статье А.Д.Бендукидзе «Архимед и квадратура параболы» («Квант», 1971, № 7, с. 7).

**) Принцип Кавальери для площадей уже упоминался на страницах «Кванта» — в статье С. Верова «Тайны циклоиды» («Квант», 1975, № 8, с. 21) и в статье С. Пухова «Задача о выпуклых телах» («Квант», 1977, № 2, с. 30).

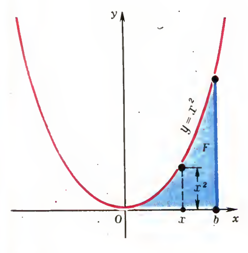


Рис. 11.

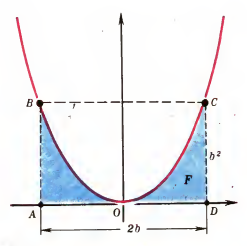


Рис. 12.

кроме F, имеется еще одна фигура H (рис. 13), проекцией которой на ось абсцисс служит *тот же* отрезок $[a, b]$. Предположим, кроме того, что каждая прямая, параллельная оси ординат, пересекает фигуры F и H по *конгруэнтным* отрезкам. Тогда площадь фигуры H выражается *тем же* интегралом, что и площадь фигуры F, т. е. $S(H)=\int_a^b f(x)\,dx$, и потому $S(F)=S(H)$. Итак, *если любая прямая, параллельная заданной фиксированной прямой* (например, оси ординат), *пересекает фигуры F и H по конгруэнтным отрезкам, то фигуры F и H равновелики*: $S(F)=S(H)$. Это и есть принцип Кавальери (для площадей). Мы вывели его с помощью формулы, выражающей площадь фигуры через интеграл. Кавальери же высказал свой принцип (и применял его для вычисления площадей и объемов) еще до того, как в трудах Ньютона, Лейбница и других ученых были введены понятия первообразной и интеграла.

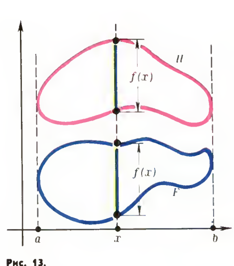


Рис. 13.

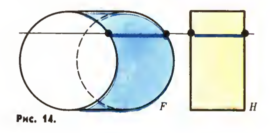


Рис. 14.

На рисунке 14 показаны две фигуры, которые, в силу принципа Кавальери, являются равновеликими. Впрочем, равенство площадей этих фигур можно легко установить и методом разбиения (как?).

Понятие *объема* вводится аналогично понятию площади. При конструктивном определении рассматриваются *кубильяжи* (аналоги палеток), т. е. разбиения пространства на конгруэнтные кубы. Рассмотрим кубильяж, у которого длина ребер кубов равна $1/10^k$. Пусть пространственная фигура F содержит фигуру, составленную из a_k кубов этого кубильяжа, и содержится в фигуре, составленной из b_k таких кубов. Тогда $\frac{a_k}{10^{3k}}$ есть значение объема фигуры F *с недостатком*, а $\frac{b_k}{10^{3k}}$ — *с избытком*. Если фигура F такова, что пределы

$$\underline{V}(F)=\lim_{k\to\infty}\frac{a_k}{10^{3k}},\quad \overline{V}(F)=\lim_{k\to\infty}\frac{b_k}{10^{3k}}$$

совпадают, то фигура F называется *кубируемой*, а число $\underline{V}(F)=\overline{V}(F)$ называется *объемом* фигуры F и обозначается через $V(F)$. Объем V представляет собой *функцию*, заданную на классе всех кубируемых фигур и принимающую числовые значения.

Как и площадь, объем может быть определен аксиоматически, причем аксиомы, на которых основывается понятие объема, совершенно аналогичны аксиомам площади:

(α) *функция V неотрицательна*, т. е. $V(F)\geqslant 0$ для любой кубируемой фигуры F;

(β) *функция V аддитивна*, т. е. если F_1 и F_2 — кубируемые фигуры, не имеющие общих внутренних точек, то $V(F_1\cup F_2)=V(F_1)+V(F_2)$;

(γ) *функция V инвариантна относительно перемещений*, т. е. если $F_1\cong F_2$, то $V(F_1)=V(F_2)$;

(δ) *единичный куб* (т. е. куб, ребро которого имеет длину 1) *имеет объем* 1.

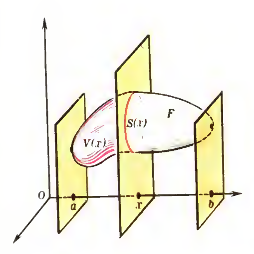


Рис. 15.

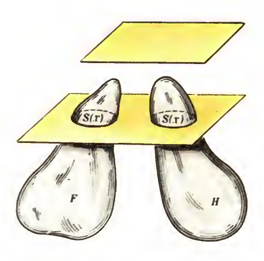


Рис. 16.

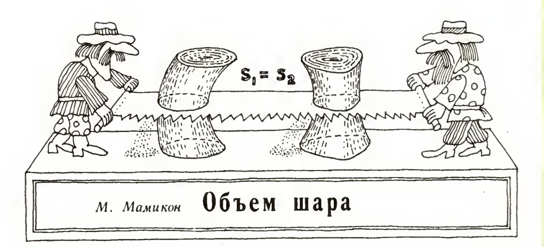
Как и в случае площадей, имеет место теорема существования и единственности.

Не останавливаясь на других методах, рассмотрим вычисление объемов при помощи интегрирования и принцип Кавальери для объемов. Пусть в пространстве задана система координат и взята некоторая фигура F, проекция которой на ось абсцисс представляет собой некоторый отрезок $[a, b]$. Через $S(x)$ обозначим площадь фигуры, высекаемой из F плоскостью, которая перпендикулярна оси абсцисс и проходит через точку x отрезка $[a, b]$. Далее, через $V(x)$ обозначим объем той части фигуры F, которая расположена левее проведенной плоскости (рис. 15). Тогда справедливо равенство $V'(x) = S(x)$, т. е. V является *первообразной* для функции S. Доказательство этого равенства — такое же, как в случае площадей.

Конечно, чтобы доказательство прошло, следует сделать некоторые предположения. Фигура F должна быть кубируемой, ее сечения — квадрируемыми. Кроме того, следует сделать некоторые предположения о характере границы тела F (чтобы прошло рассуждение, аналогичное показанному на рис. 10). В учебнике X класса, например, справедливость равенства $V'(x) = S(x)$ обосновывается для случая, когда F — фигура вращения специального вида. Мы на этом не останавливаемся. Из равенства $V'(x)=S(x)$ следует, что для объема фигуры F справедлива формула

$$V(F) = \int_a^b S(x)\,dx.$$

Наконец, из этой формулы вытекает *принцип Кавальери для объемов*: *если любая плоскость, параллельная заданной фиксированной плоскости, пересекает пространственные фигуры F и H по фигурам, имеющим одинаковую площадь* (рис. 16), *то фигуры F и H равновелики*: $V(F) = V(H)$. Изящный пример применения принципа Кавальери к вычислению объемов имеется в публикуемой в этом номере заметке М. Мамикона.



М. Мамикон

Объем шара

Наверное, каждый школьник хорошо знает, чему равен объем шара. А знаете ли вы, что первым объем шара посчитал древний грек Архимед еще в третьем веке до н. э.?

Объем шара Архимед нашел двумя способами. Первый способ заключался в составлении интегральных сумм и, по существу, был очень близок к современному методу интегрирования (см. «Алгебра и начала анализа 10», пп. 104, 107). Второй, более элементарный способ Архимеда состоял в использовании механического принципа, сочетающего в себе принцип поперечных сечений и найденное им же правило рычага.

Архимед установил, что объем шара в полтора раза меньше объема цилиндра, описанного около шара:

$$V_ш = \frac{2}{3} v_ц .$$

Этот результат Архимед считал самым большим своим достижением. По завещанию Архимеда на его могиле был высечен шар, вписанный в цилиндр. Именно по этому признаку могилу Архимеда через полтора столетия разыскал Цицерон. Сейчас она снова утеряна.

В первой части статьи мы расскажем, как Архимед нашел объем шара с помощью своего механического метода. А затем решим эту задачу чисто геометрически.

Еще до Архимеда был известен принцип поперечных сечений, ныне известный как «принцип Кавальери» (см. статью В. Болтянского «О понятиях площади и объема», с. 2). Этот принцип состоит в следующем.

Пусть в пространстве заданы два тела (см. заставку), и пусть любая плоскость, параллельная данной, в сечении с этими телами образует две фигуры, площади которых равны друг другу: $S_1 = S_2$. (При этом сечение каждого тела, вообще говоря, является переменным.) Тогда эти два тела имеют равные объемы: $V_1 = V_2$.

Представим себе, что оба тела выложены из очень тонких плоскопараллельных слоев одинаковой толщины. Если каждый слой одного тела весит столько, сколько весит соответствующий ему слой в другом теле, то и целиком оба тела весят одинаково.

Очевидно теперь, что принцип поперечных сечений справедлив и в более общей форме: если заданы три тела и в каждом из плоскопараллельных сечений площади сечений первых двух тел в сумме равны площади сечения третьего тела: $S_1 + S_2 = S_3$, то сумма объемов первых двух тел равна объему третьего тела: $V_1 + V_2 = V_3$.

Как мы увидим ниже, Архимед, применяя более общее, механическое развитие принципа поперечных сечений, сумел выразить объем шара через объемы цилиндра и конуса. Последние же были посчитаны еще до Архимеда. В частности, Евдокс показал, что объем конуса в три раза

меньше объема описанного около него цилиндра.

Метод Архимеда

Нарисуем, следуя Архимеду, круг радиуса R и прямоугольник, имеющий с кругом общий центр O, со сторонами длины $2R$ и $4R$. Впишем в этот прямоугольник равнобедренный прямоугольный треугольник с прямым углом при вершине A (рис. 1).

Если вращать наш рисунок вокруг оси AB, то круг при вращении образует шар радиуса R, прямоугольник — круговой цилиндр с радиусом основания $2R$, а треугольник — конус, вписанный в цилиндр, с тем же основанием.

Выберем на оси вращения AB точку C на некотором расстоянии x от точки A и проведем через точку C плоскость α, перпендикулярную (AB). В сечении с цилиндром она образует круг радиуса $2R$, в сечении с конусом — круг радиуса $|CD| = |AC| = x$ (поскольку угол при вершине конуса прямой); в сечении с шаром — круг радиуса $|CE|$. Из рисунка 1 видно, что

$$|AE|^2 = |CE|^2 + |AC|^2 = |CE|^2 + |CD|^2.$$

С другой стороны, AE — это катет прямоугольного треугольника AEB (AB — диаметр круга), а потому $|AE|^2 = |AB| \cdot |AC|$. Следовательно,

$$|AB| \cdot |AC| = |CD|^2 + |CE|^2.$$

Умножив обе части этого равенства на число $\pi \cdot |AB|$, получим

$$\pi \cdot |AB|^2 \cdot |AC| = \pi \cdot |CD|^2 \cdot |AB| + \pi \cdot |CE|^2 \cdot |AB|. \quad (1)$$

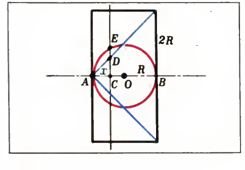


Рис. 1.

Величина $S_к = \pi \cdot |CD|^2$ — это площадь круга, получающегося при пересечении конуса плоскостью α. Величина $S_ш = \pi \cdot |CE|^2$ — это площадь круга, получающегося в сечении шара.

Площадь же круга, получающегося в сечении цилиндра, равна $S_ц = \pi \cdot |AB|^2$. Поэтому равенство (1) мы можем переписать так:

$$x \cdot S_ц = 2R\,(S_к + S_ш). \quad (2)$$

Если бы множитель x был постоянный, то с помощью принципа поперечных сечений мы выразили бы друг через друга объемы шара, конуса и цилиндра.

Но множитель x — переменный, и это сильно осложняет ситуацию. Казалось бы, дальше не продвинуться. Но тут Архимеда осеняет гениальная догадка, смысл которой состоит в следующем.

Отложим на прямой AB влево от точки A отрезок AT: $|AT| = |AB|$. Представим теперь, что отрезки AB и AT являются плечами рычага, точка опоры которого совпадает с точкой A. Тогда соотношение (2) показывает, что если перенести круговые сечения шара $S_ш$ и конуса $S_к$ в точку T, то они «уравновесят» по отношению к точке A круговое сечение цилиндра $S_ц = \pi \cdot |AB|^2$, оставленное на своем месте C *). Архимед замечает, что подобное соотношение устанавливается и для любых других сечений шара, конуса и цилиндра, лежащих в одной и той же «вертикальной» плоскости. Тут важно отметить, что сечения шара и конуса «подвешиваются» все время в одной и той же точке T, на расстоянии $2R$ от точки опоры рычага A, а сечения цилиндра — на расстоянии x от точки опоры A. Рассматривая различные сечения наших трех тел вертикальными плоскостями (отстоящими от точки A на различные расстояния x), мы каждый раз подвешиваем сечения цилиндра в разных местах (сечения конуса и шара

*) Мы предполагаем, что сечения $S_ш$, $S_к$ и $S_ц$ сделаны из одного материала в виде очень тонких круглых дисков одинаковой толщины.

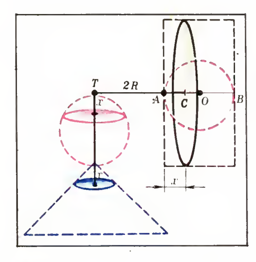


Рис. 2.

меняются по величине при изменении x). Меняя x от нуля до $2R$, т. е. рассматривая всевозможные сечения трех тел, мы, соответственно, уравновешиваем каждые три сечения (см. рис. 2). В результате слева в точке T оказываются подвешенными все сечения шара и конуса, а справа — все сечения цилиндра (рис. 3). Архимед пишет *): «Если теперь, беря такие круги, заполнить ими как цилиндр, так и шар с конусом, то цилиндр, оставаясь в том же положении, будет относительно точки A находиться в равновесии со вместе взятыми шаром и конусом, если перенести их на рычаг в T и поместить так, чтобы центр тяжести каждого из них оказался под T». Но центр тяжести оставшегося на месте цилиндра находится в точке O — середине отрезка AB. Поэтому, если $V_ц$, $V_ш$ и $V_к$ — соответственно, объемы цилиндра, шара и конуса, то, по правилу рычага, условие равновесия имеет вид:

$$V_ц \cdot |AO| = (V_ш + V_к) \cdot |AT|,$$

т. е.

$$R \cdot V_ц = 2R \cdot (V_ш + V_к),$$

откуда

$$V_ш = \frac{1}{2} V_ц - V_к.$$

Но конус по построению был вписан в цилиндр, так что его объем втрое меньше объема цилиндра: $V_к = \frac{1}{3} V_ц$.

Поэтому

$$V_ш = \frac{1}{2} V_ц - V_к = \frac{1}{2} V_ц - \frac{1}{3} V_ц = \frac{1}{6} V_ц.$$

Заменим наш цилиндр цилиндром, описанным около шара. Радиус его основания будет вдвое меньше радиуса основания первоначального цилиндра. Объем нового цилиндра $v_ц$ в четыре раза меньше объема первоначального цилиндра: $V_ц = 4v_ц$, так что

$$V_ш = \frac{1}{6} V_ц = \frac{2}{3} v_ц,$$

т. е. объем шара в полтора раза меньше объема описанного цилиндра, — это и есть результат, которым так гордился Архимед.

*) Именно в этих рассуждениях усматривается остроумное сочетание принципа поперечных сечений с правилом механического равновесия рычага.

Геометрическое решение

Возьмем круг радиуса R и опишем около него квадрат. Проведем диагонали квадрата, как на рисунке 4.

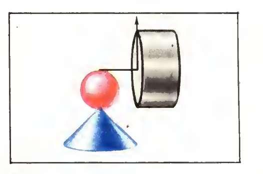


Рис. 3.

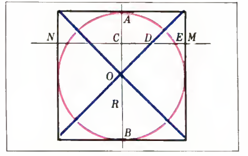


Рис. 4.

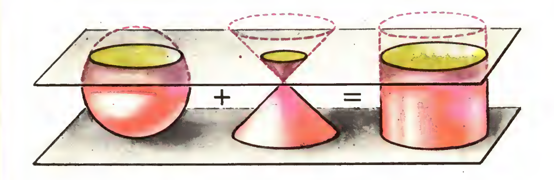


Рис. 5.

Вращая рисунок 4 вокруг вертикальной оси AB, мы получим шар радиуса R, описанный около шара цилиндр и вписанный в цилиндр «двойной» круговой конус с вершиной в центре шара O. На рисунке 5 изображены эти три тела.

Возьмем точку C на оси вращения AB на некотором расстоянии x от центра шара и проведем через C горизонтальную плоскость (MN). Эта плоскость в сечении с цилиндром образует круг радиуса $|CM| = R$, в сечении с конусом — круг радиуса $|CD| = |OC| = x$ (так как угол при вершине конуса прямой) и в сечении с шаром — круг радиуса $|CE|$. По теореме Пифагора $|OE|^2 = |CE|^2 + |OC|^2$, или

$$|CM|^2 = |CE|^2 + |CD|^2.$$

Умножив обе части этого соотношения на число π, получим $\pi \cdot |CM|^2 = \pi \cdot |CE|^2 + \pi \cdot |CD|^2$, т. е.

$$s_ц = S_ш + s_к, \qquad (3)$$

где $s_ц$, $S_ш$ и $s_к$ — соответственно, площади кругов, получающихся при пересечении цилиндра, шара и конуса плоскостью (MN).

Соотношение (3) выполняется для любых других сечений цилиндра, шара, и конуса, лежащих в одной и той же горизонтальной плоскости. Вспоминая принцип поперечных сечений, перейдем от соотношения (3) для площадей к такому же соотношению для объемов:

$$v_ц = V_ш + v_к.$$

Поскольку объем цилиндра втрое больше объема вписанного в него «двойного» конуса (у которого те же основание и высота), т. е. $v_к = \frac{1}{3} v_ц$, мы получаем результат Архимеда:

$$V_ш = v_ц - v_к = v_ц - \frac{1}{3} v_ц = \frac{2}{3} v_ц,$$

а именно, что объем шара в полтора раза меньше объема описанного цилиндра.

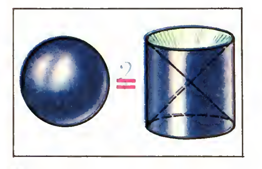


Рис. 6.

Задача

На рисунке 6 изображены шар и цилиндр с двумя коническими воронками на основаниях. Высота и диаметр основания цилиндра равны диаметру шара. Какое из этих двух тел весит больше?

А. Дозоров

Можно ли поднять себя за волосы?



Решение самой сложиой техиической задачи, как правило, начииается с рассмотреиия идеальиого варианта, часто весьма далекого от реальиой проблемы. Аналогичиым образом позволит себе действовать автор этих строк и иачиет издалека.

Вариант первый

З а д а ч а. *На носу лодки установлен щит, в который мальчик с кормы лодки бросает камни. Считая удар камня о щит абсолютно неупругим и пренебрегая силой трения лодки о воду и камня о воздух, найти перемещение центра масс системы.*

Р е ш е и и е. Рассмотрим систему лодка (со щитом) — мальчик — камеиь. Все силы, действующие иа тела в этой системе, — это силы взаимодействия между телами системы. Никакие виешние силы иа систему ие действуют (ведь силами трения камия о воздух и лодки о воду мы пренебрегаем). Но это означает, что импульс (количество движеиия) системы остается иеизмениым. И если в начальиый момент времени (до бросаиия камия) центр масс системы был иеподвижным (лодка иаходится в стоячей воде) или двигался с иекоторой скоростью $\vec{v}$ (лодка плывет по течению), то и в любой другой момеит времеии он будет неподвижеи или будет двигаться с той же самой скоростью $\vec{v}$. И бросаиие камия, и удар камия о щит иикак не скажутся иа положении цеитра масс. Иными словами, силы взаимодействия между телами изолированиой (замкиутой) системы ие могут измеиить положения центра масс системы.

Вариант второй, в котором задача несколько усложняется

З а д а ч а. *На носу лодки установлен щит, в который мальчик с кормы лодки бросает камни. Считая, что удар камня о щит абсолютно неупругий, а абсолютная величина силы трения лодки о воду равна F, и пренебрегая силой трения камня о воздух, найти перемещение центра масс системы*).*

Р е ш е и и е. Если до бросания камня центр масс системы был иеподвижен, то скорость лодки $\vec{v}_{л_0}$ сразу после броска и скорость камия $\vec{v}_к$ связаиы соотиошением

$$m\vec{v}_к + M\vec{v}_{л_0} = 0$$

(m — масса камия, M — масса лодки). После броска, как только лодка иачнет двигаться со скоростью $\vec{v}_{л_0}$, система лодка — мальчик — камеиь

*) В жидкостях сила трения зависит от скорости движущегося тела. Поэтому говорить о постояииой силе треиия ие совсем коректио. Одиако все качествеиные рассуждеиия и выводы, которые мы получим в этом вариайте, будут справедливы; под силой $\vec{F}$ следует понимать среднее (за время t) зиачеиие силы трения.

перестанет быть изолированной. На нее начнет действовать внешняя сила —сила—$\vec{F}$ трения лодки о воду (знак «—» перед $\vec{F}$ означает, что направление этой силы противоположно направлению $\vec{v}_{\text{л0}}$). Сила трения будет уменьшать скорость движения лодки, и к моменту удара камня о щит (через время t после броска) скорость лодки станет $\vec{v}_{\text{л}t} < \vec{v}_{\text{л0}}$, так что к этому моменту абсолютная величина импульса лодки уменьшится: $M\,|\vec{v}_{\text{л}t}| < M\,|\vec{v}_{\text{л0}}| = m\,|\vec{v}_{\text{к}}|$. Значит, суммарный импульс всей системы сразу после удара камня о щит будет отличен от нуля и направлен в сторону движения камня. Абсолютную величину скорости $\vec{u}$ всей системы (ее центра масс) после удара можно определить из соотношения (см. рис. 1)

$$(M+m)\,|\vec{u}| = m\,|\vec{v}_{\text{к}}| - M\,|\vec{v}_{\text{л}t}|,$$

или (так как $M\,|\vec{v}_{\text{л}t}| = M\,|\vec{v}_{\text{л0}}| - |\vec{F}|t = m\,|\vec{v}_{\text{к}}| - |\vec{F}|t$)

$$(M+m)\,|\vec{u}| = |\vec{F}|t.$$

А зная величины $\vec{u}$ и $\vec{F}$, нетрудно найти и перемещение центра масс системы в любой момент времени.

Итак, наличие силы трения лодки о воду приводит к следующим особенностям:

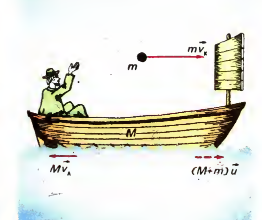


Рис. 1.

1) скорость лодки после удара камня о щит будет направлена в сторону бросания;

2) чем больше сила трения, тем быстрее убывает скорость «отдачи» лодки, тем меньше $\vec{v}_{\text{л}t}$, тем, следовательно, больше конечная скорость всей системы.

Таким образом, бросая камни с кормы на нос лодки, можно передвигаться без использования весел. После того как все камни с кормы будут переброшены на нос, необходимо очень медленно перетащить их назад. Затем все можно повторить сначала.

Если в лодке нет камней, а весла потеряны, то все равно положение не безвыходное. Роль камня может играть сам человек. Нужно быстро прыгать с кормы на нос и медленно возвращаться назад.

Если путешественник изобретателен, то совершение диких прыжков с кормы на лодку он поручит механизму. Достаточно установить на лодке эксцентрик, который в разные стороны движется с неодинаковыми скоростями.

Описанный выше способ передвижения не является оригинальным. Уже много лет в журналах появляются заметки о подобных самодвижущихся тележках. А в последние годы созданы и большие модели таких экипажей.

Вариант третий, в котором все учитывается

Учтем теперь и силу $\vec{F}$ трения лодки о воду, и силу $\vec{\mathscr{F}}$ трения камня о воздух.

После того как мы разобрались со вторым вариантом, мы можем сразу записать, чему будет равен суммарный импульс системы сразу после удара камня о щит:

$$(M+m)\vec{u} = \vec{F}t + \vec{\mathscr{F}}t.$$

Здесь по-прежнему $\vec{u}$ — скорость центра масс системы, t — время полета камня до удара о щит. Заменив векторные величины их проекциями на направление движения лодки и приняв направление полета камня

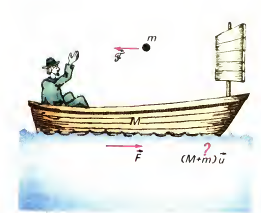


Рис. 2.

за положительное, получим (рис. 2)

$$(M+m)u=(F-\mathscr{F})\,t.$$

Итак, в зависимости от того, каковы силы $\vec{F}$ и $\vec{\mathscr{F}}$, лодка может после удара камня о щит остаться неподвижной, а может и приобрести скорость, направленную либо в сторону бросания камня ($|\vec{F}|>|\vec{\mathscr{F}}|$), либо в противоположную сторону ($|\vec{\mathscr{F}}|>|\vec{F}|$).

Автор решительно выступает в защиту барона Мюнхаузена

Помните ли вы замечательную историю, рассказанную бароном Мюнхаузеном? Находясь в крайне тяжелом положении (увязая в болоте), барон спас свою жизнь, вытянув самого себя за волосы. Как и все, о чем рассказывал этот замечательный фантазер, эта история представлялась слушателям чистой выдумкой. Но вам, читатель, после того, как вы разобрали три варианта задачи о лодке и камне, не кажется ли, что в данном случае Мюнхаузен рассказывал чистую правду?

Давайте установим аналогию между задачей о лодке и задачей, которую успешно решил барон Мюнхаузен.

Заменим лодку (без камня) туловищем человека, а роль бросаемого камня отведем рукам человека. Если быстро выбросить руки вверх и немного медленнее вернуть их в исходное положение, то, по аналогии с уже рассмотренными вариантами, в результате действия силы трения о воздух (или о другую среду, в которой находится человек) тело человека может приобрести некоторую скорость, направленную вверх. Роль щита в лодке в этом случае выполняют плечи человека. Если экспериментатор держит себя за волосы (что, кстати, делать не обязательно), роль щита выполняет его неразумная голова. Чтобы не учитывать реакцию твердой опоры, рассмотрим человека, подпрыгнувшего на некоторую высоту и энергично дергающего себя за шевелюру. Если действия его действительно энергичны и удовлетворяют алгоритму, описанному выше, то скорость движения вверх может превысить скорость падения вниз (корректнее говорить о соответствующих силах), и человек сможет не только парить в воздухе, но и подниматься вверх.

Возражения читателей, у которых эксперимент пройдет неудачно, автор рассматривать не будет. Учтите, что только изящная постановка эксперимента может привести к его согласию с теорией.

Задачи наших читателей

1. На сторонах треугольника ABC внешним образом построены равносторонние треугольники. Пусть D, E, F — центры тяжести этих треугольников. Доказать, что $S_{DEF}\geqslant S_{ABC}$.

А. Ермилов
(г. Коломна)

2. Три точки на плоскости являются концами диаметров трех окружностей, причем одна из окружностей проходит через все три точки.

Доказать, что площадь большего круга равна сумме площадей двух меньших.

М. Васнецов
(г. Москва)

3. На плоскости даны треугольники ABC и MNK, причем прямая MN проходит через середины сторон AB и AC, а в пересечении этих треугольников образуется шестиугольник площади S с попарно параллельными противоположными сторонами. Доказать, что

$$3S<S_{ABC}+S_{MNK}.$$

Я. Темралиев
(с. Новый Рычан Астраханской обл.)



Г. Новинский,
В. Хомазюк

Закон Архимеда и... решение уравнений

В прошлом году в девятом номере нашего журнала было рассказано, как решать кубические уравнения с помощью формулы Кардано и графическим способом. Теперь мы хотим познакомить вас еще с одним способом решения уравнений третьей степени — с помощью... некоторых законов физики.

Перелистывая страницы старого, но очень интересного журнала «Вестник опытной физики и элементарной математики» (1903 г., № 348), мы обнаружили описание давно забытой весьма остроумной машины Меслина для решения алгебраических уравнений. Меслин предложил находить корни уравнения

$$a_ny^n + a_{n-1}y^{n-1} + \ldots + a_1y + a_0 = 0, \quad (1)$$

определяя глубину погружения в воду специально изготовленных грузов, подвешенных к коромыслу весов (см. рисунок).

Что же собой представляют эти грузы? Оказывается, грузы должны быть такой формы, чтобы объем вытесняемой ими воды был численно равен глубине погружения, возведенной в соответствующую степень (1, 2, 3, ..., n). Другими словами, каждому члену в уравнении (1) должен соответствовать определенный груз.

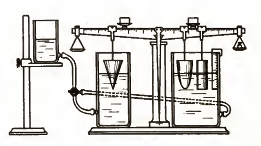
Удобнее всего в качестве грузов использовать тела вращения*). Для члена a_1y соответствующим телом вращения будет цилиндр с площадью основания, равной единице. Объем воды, вытесняемой таким цилиндром, будет численно равен глубине погружения (y). Для члена a_2y^2 надо изготовить тело, называемое параболоидом вращения. Оно образуется при вращении параболы (точнее, дуги параболы) вокруг своей оси. Если парабола описывается уравнением $y = \frac{\pi}{2}x^2$, то объем параболоида вращения $V = \frac{1}{2}Sy = \frac{1}{2}(\pi x^2)y = y^2$. При погружении этого тела на глубину y объем вытесняемой воды будет равен y^2 — квадрату глубины погружения. Члену a_3y^3 соответствует конус, образующая которого описывается уравнением $y = \sqrt{\frac{\pi}{3}}x$. Такой конус вытесняет объем воды, равный y^3 — кубу глубины погружения (проверьте это!).

Можно показать, что и в общем случае, если для члена $a_k\ y^k$ изготовить соответствующее тело, вращая кривую (точнее, дугу кривой) $y = \sqrt[k-1]{\frac{\pi x^2}{k}}$ вокруг оси ординат, то объем вытесненной этим телом воды будет численно равен y^k.

Как же все-таки работает машина Меслина? Рассмотрим конкретный пример — экспериментально найдем корни кубического уравнения

$$y^3 - 16y^2 + 83y - 140 = 0. \quad (2)$$

Для работы понадобятся рычажные весы, три сообщающихся сосуда с водой (или один большой прозрачный сосуд) и три груза — цилиндр, параболоид вращения и конус. Коромысло весов лучше не прикреплять к стойке (как показано на рисунке), а, подобно аптекарским весам, подвесить на



*) См., например, главу IV «Геометрии 10».

нити. На правом и левом плечах коромысла длиной 20 *см* сделаем отметки в миллиметрах. Грузы можно изготовить, например, из алюминия. Высота всех грузов пусть будет одинакова и равна 10 *см*. Площадь основания цилиндра возьмем равной 1 $см^2$, тогда его объем будет равен 10 $см^3$, а масса —27 *г*. Однако разумно массу цилиндра уменьшить до 10 *г* (т. е. сделать ее численно равной объему): необходимые расчеты существенно упростятся. Для этого можно изнутри, вдоль оси цилиндра, высверлить соответствующее отверстие (но не до дна!). Аналогично изготовим и другие тела вращения. Параболоид вращения будет иметь объем 100 $см^3$ и массу 100 *г* (и в этом случае часть металла изнутри придется удалить). А вот конус лучше сделать в 100 раз меньшим по объему и массе, чем предлагалось Меслиным. Иначе при высоте конуса 10 *см* диаметр его в верхней части будет порядка 20 *см*! Таким образом, образующая нашего конуса описывается уравнением $y = 10\sqrt{\frac{\pi}{3}}\,x$, объем конуса (при высоте 10 *см*) равен 10 $см^3$, а масса (с учетом внутреннего отверстия) — 10 *г*. При этом диаметр верхней части конуса ≈ 2 *см*, так что никаких «технических» затруднений не возникает.

Теперь приступим непосредственно к эксперименту. Для удобства перепишем уравнение (2) иначе, перенеся члены с отрицательными коэффициентами вправо:

$$y^3 + 83y = 16y^2 + 140. \qquad (3)$$

Развесим грузы на коромысле весов и приведем весы в равновесие. Конус, соответствующий члену y^3, подвесим к левому плечу коромысла. Поскольку коэффициент при y^3 в уравнении (3) равен 1, было бы разумно прикрепить конус на расстоянии 1 *мм* (будем измерять расстояния в *мм*) от оси вращения коромысла. Но масса конуса у нас в 100 раз меньше, чем она должна быть. Чтобы скомпенсировать это, подвесим конус на отметке 100 *мм*. Цилиндр, соответствующий члену $83y$, подвесим тоже к левому плечу коромысла на расстоянии 83 *мм* от его середины. На правое плечо коромысла подвесим параболоид вращения на отметке 16 *мм*. Ясно, что весы не будут в равновесии: сумма моментов сил, вращающих коромысло против часовой стрелки, не равна сумме моментов сил, вызывающих вращение по часовой стрелке. Однако равновесия можно легко добиться, причем самыми разными способами. Например, прикрепим к делению 100 *мм* на правом плече коромысла необходимый добавочный грузик. Из условия равенства моментов сил тяжести легко найти массу этого грузика — она равна 2,3 *г*.

Затем начнем постепенно заполнять водой сообщающиеся сосуды. Как только вода дойдет до подвешенных грузов (заметим, что их нижние вершины должны находиться на одном уровне), равновесие нарушится. Это и понятно: при погружении на одну и ту же глубину разные тела вытесняют разные объемы воды, т. е. возникают разные выталкивающие силы. А дополнительный грузик и вовсе не погружается в воду.

Можно ли восстановить нарушенное равновесие? Да, если суммарные моменты выталкивающих сил, действующих на коромысло весов слева и справа, станут одинаковыми. Пусть глубина погружения тел равна y. Тогда момент выталкивающей силы, действующей на конус, пропорционален y^3, на цилиндр — 83 y, а на параболоид вращения — $16y^2$ (коэффициентом пропорциональности является ускорение свободного падения). Но все эти величины входят в уравнение (3)! Только свободный член оказался «не при деле». Включим и его в работу. Чтобы представить выталкивающий момент, соответствующий свободному члену нашего кубического уравнения, создадим на левом плече коромысла момент, пропорциональный величине этого свободного члена (140). Для этого можно, например, еще один дополнительный грузик массой 1,4 *г* подвесить на отметке 100 *мм* левого плеча коромысла.

Таким образом, уравнение моментов выталкивающих сил будет выглядеть так:

$$y^3 + 83y = 16y^2 + 140.$$

Измеряя глубину погружения y соответствующего положения равнове-

сия, найдем корни нашего исходного уравнения. В первый раз равновесие восстанавливается при глубине погружения 4 *см*, во второй раз — при глубине 5 *см* и в третий раз — 7 *см*. Обратите внимание, что каждый раз при переходе положения равновесия наклон коромысла изменяется на противоположный. До глубины 4 *см* коромысло наклонено влево, от 4 до 5 *см* — вправо и т. д.

В принципе таким методом можно находить и отрицательные корни. Для этого надо в исходном уравнении сделать замену переменной: $y = -x$ и искать x для соответствующего уравнения.

Хотя точность определения корней описанным методом невелика, сам метод, по нашему мнению, представляет определенный интерес. Пожалуй, самое трудное в этом эксперименте — изготовить параболоид вращения. Однако эту трудность легко избежать, но об этом ... в следующей статье.

В. Смышляев

Сообщающиеся сосуды и ... уравнения

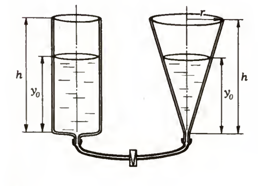
Кубическое уравнение вида

$$y^3 + ay^2 + by + c = 0$$

простым преобразованием можно привести к уравнению без квадратного члена, т. е. к уравнению

$$x^3 + px + q = 0.$$

Для этого достаточно положить $y = x - \frac{a}{3}$.



Рассмотрим частный случай последнего уравнения, когда $p \geqslant 0$, а $q < 0$. Сделаем еще одну замену: пусть $x = y\sqrt{p}$. Получим уравнение вида

$$y^3 + y = a, \qquad (*)$$

где $a = \frac{-q}{p\sqrt{p}}$ $(a>0)$. Найдем положительный корень этого уравнения.

Возьмем два сосуда одной и той же высоты h (см. рисунок): один — цилиндрический с площадью основания 1 *см*², другой — конический с объемом h^3 $\left(\frac{h}{r} = \sqrt{\frac{\pi}{3}}\right)$. Соединим их тонкой трубкой с краном. Нальем в один из сосудов a *см*³ воды и откроем кран. Вода будет перетекать во второй сосуд до тех пор, пока уровни воды в обоих сосудах не станут одинаковыми. Обозначим через y_0 высоту уровня воды. При этом объем воды в цилиндрическом сосуде будет численно равен y_0, в коническом сосуде — y_0^3, а суммарный объем воды равен a. Следовательно,

$$y_0^3 + y_0 = a$$

(объемом воды в соединительной трубке мы пренебрегаем).

Значит, y_0 — один из корней уравнения (*).

задачник Кванта

Задачи

M441 — M445; Ф453 — Ф457

Этот раздел ведется у нас из номера в номер с момента основания журнала. Публикуемые в нем задачи не стандартны, но для их решения не требуется знаний, выходящих за рамки нынешней школьной программы. Наиболее трудные задачи отмечены звездочкой. После формулировки задачи мы обычно указываем, кто предложил нам эту задачу. Разумеется, не все эти задачи публикуются впервые.

Решения задач из этого номера можно присылать не позднее 1 июля 1977 года по адресу: 113035, Москва, М-35, Б. Ордынка, 21/16, редакция журнала «Квант», «Задачник «Кванта». После адреса на конверте напишите номера задач, решения которых вы посылаете, например: «M441, M442» или «... Ф453». Решения задач по каждому из предметов (математике и физике), а также новые задачи просьба присылать в отдельных конвертах. Задачи из разных номеров журнала присылайте также в разных конвертах. В письмо вложите конверт с написанным на нем вашим адресом (в этом конверте вы получите результаты проверки решений). Условия оригинальных задач, предлагаемых для публикации, присылайте в двух экземплярах вместе с вашими решениями этих задач (на конверте пометьте: «Задачник «Кванта», новая задача по физике» или «... новая задача по математике»). В начале каждого письма просим указывать ваши имя, фамилию, номер школы и класс, в котором вы учитесь.

M441. Внутри выпуклого $2n$-угольника взята произвольная точка P. Через каждую вершину и точку P проведена прямая. Докажите, что найдется сторона многоугольника, с которой ни одна из проведенных прямых не имеет общих точек (кроме, быть может, концов стороны).

Г. Гуревич

M442. Дано простое число $p>2$. Для каждого k от 1 до $p-1$ обозначим через a_k остаток от деления числа k^p на p^2. Докажите, что

$$a_1 + a_2 + a_3 + \ldots + a_{p-1} = (p^3 - p^2)/2.$$

С. Охитин

M443. Имеется таблица $n \times n$ клеток, в каждой клетке которой вначале стоит число 0. Разрешается произвольно выбрать n чисел, стоящих в разных строках и разных столбцах, и увеличить каждое из них на 1.

а) Можно ли за несколько шагов получить таблицы, изображенные на рисунках 1 и 2?

б) Можно ли получить таблицу с попарно различными числами?

в) * Какие вообще таблицы можно получить через T шагов?

Ф. Шлейфер

M444. а) На рисунке 3 четыре прямые разбивают плоскость на одиннадцать областей: четырех-

1	2	3	• • •	n
2	3	4	• • •	1
3	4	5	• • •	2
⋮	⋮	⋮	⋱	⋮
n	1	2	• • •	n-1

Рис. 1.

1	2	3	• • •	n
2	3	4	• • •	n+1
3	4	5	• • •	n+2
⋮	⋮	⋮	⋱	⋮
n	n+1	n+2	• • •	2n-1

Рис. 2.

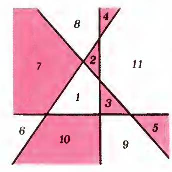


Рис. 3.

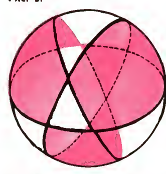


Рис. 4.

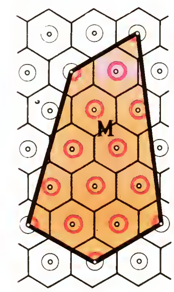


Рис. 5.

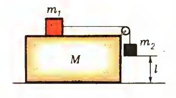


Рис. 6.

угольник (1), два треугольника (2 и 3), три угла (4, 5 и 6), четыре «бесконечных треугольника» – области, ограниченные каждая отрезком и двумя лучами (7, 8, 9 и 10), и «бесконечный четырехугольник» — область, ограниченную двумя отрезками и двумя лучами (11).

Будет ли сказанное верно для любых четырех прямых на плоскости, среди которых нет параллельных и нет троек прямых, проходящих через одну точку?

б) Три больших круга, не проходящих через одну точку, разбивают сферу на восемь треугольников. На какие области разбивают сферу четыре больших круга, никакие три из которых не проходят через одну точку? (Большим кругом на сфере называют окружность, являющуюся пересечением сферы с плоскостью, проходящей через центр сферы; рис. 4.)

в) На какие области могут разбить сферу пять больших кругов, никакие три из которых не проходят через одну точку?

А. Колмогоров

М445. Центры одинаковых непересекающихся окружностей находятся в центрах правильных шестиугольников, покрывающих плоскость так, как указано на рисунке 5. Пусть M — многоугольник с вершинами в центрах окружностей. Окрасим в красный цвет те окружности или их части (дуги), которые лежат внутри M. Покажите что сумма градусных величин красных дуг равна $C\cdot 180^\circ$, где $C=C(M)$ — целое число, и дайте этому числу геометрическую интерпретацию.

А. Сосинский

Ф453. Система грузов, показанная на рисунке 6, стоит на гладком горизонтальном столе. Массы кубиков m_1, m_2 и M. Кубик массы m_2 удерживают на высоте l над столом. Если систему предоставить самой себе, то она придет в движение, причем верхний кубик будет скользить по нижнему. Коэффициент трения между кубиками равен k. На какое расстояние переместится нижний кубик к тому моменту, когда кубик массы m_2 коснется стола?

Ф454. Если на первичную обмотку ненагруженного трансформатора подать напряжение $u_0=220$ *в*, то напряжение на вторичной обмотке будет $u_1=127$ *в*. Какое напряжение будет при $u_0=220$ *в* на нагрузке $R=10$ *ом*, подключенной ко вторичной обмотке этого трансформатора? Активное сопротивление первичной обмотки трансформатора $r_1=2$ *ом*, а вторичной — $r_2=1$ *ом*. Внутреннее сопротивление генератора тока принять равным нулю.

В. Скороваров

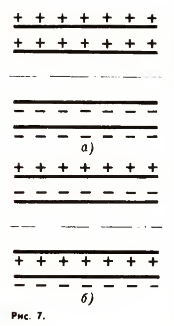


Рис. 7.

Ф455. Потери мощности в линии электропередачи составляют 5% от мощности, получаемой потребителем. Как нужно изменить напряжение на входе линии и сопротивление потребителя для того, чтобы при той же мощности, получаемой потребителем, потери в линии снизить до 1%?

И. Слободецкий

Ф456. Какую минимальную скорость нужно сообщить на Земле космическому кораблю для того, чтобы он попал на Солнце? Каким будет время полета корабля к Солнцу?

Ф457. Два плоских воздушных конденсатора с одинаковыми обкладками заряжены до одинаковых зарядов. Расстояние между обкладками у первого конденсатора вдвое больше, чем у второго. Как изменится энергия электрического поля системы, если второй конденсатор вставить между обкладками первого так, как показано на рисунке 7, *а* и *б*?

С. Козел

Решения задач

М396, М397, М400—М402 *); Ф407—Ф412

М396. *Треугольник, все стороны которого больше 1 см, назовем «большим». Дан правильный треугольник ABC со стороной 5 см. Докажите, что: а) из треугольника ABC можно вырезать 1000 «больших» треугольников; б) треугольник ABC можно разрезать на 1000 «больших» треугольников; в) треугольник ABC можно триангулировать на 1000 «больших» треугольников, то есть разбить его так, чтобы любые два треугольника либо не имели общих точек, либо имели только общую вершину, либо имели общую сторону; г) сделайте пункты б) и в) для правильного треугольника со стороной 3 см.*

Мы решим пункты б) и в) задачи для треугольника со стороной 3 *см*; это же решение годится и для треугольника со стороной 5 *см*. Пункт а) немедленно следует из б).

Итак, пусть ABC — правильный треугольник со стороной 3 *см* (рис. 1). Пусть K и L — точки, делящие сторону AC на три равные части, P — середина стороны BC. Восставим из точек K и L перпендикуляры KN и LM к стороне AC; пусть $N_1 = [AP] \cap [KN)$, $M_1 = [CN_1] \cap [LM)$, $N_2 = [AM_1] \cap \cap [KN)$, $M_2 = [CN_2] \cap [LM)$, и т. д. Мы получаем разбиение треугольника на треугольники ABP, CPN_1, AN_1M_1, CM_1N_2, AN_2M_2 и т. д. Все эти треугольники — «большие»: стороны каждого из них больше 1 *см* ($|BP| = |CP| = 1{,}5$ *см*, а остальные стороны больше 1 *см*, поскольку их проекции на AC не меньше 1 *см*). Из решения ясно, что вместо числа 1000 можно было бы написать любое другое сколь угодно большое число.

---

*) Решение задачи М398 будет помещено в следующем номере журнала; задача М399 решена в статье А. Савина «От школьной задачи — к проблеме» (см. «Квант», 1976, № 12).

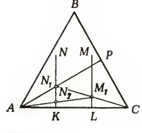


Рис. 1.

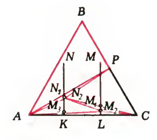


Рис. 2.

Построение триангуляции треугольника ABC на «большие» треугольники (пункт в) задачи) основано на той же идее.

Пусть точки K, L и P — такие же, как и раньше, KN и LM — перпендикуляры к AC, точка $N_1 = [AP] \cap [KN)$

Возьмем на отрезке KN_1 точку N_2 и соединим ее с точками A, P и C (рис. 2). Обозначим через M_1 точку пересечения $[LM)$ с $[CN_2]$: $M_1 = [CN_2] \cap [LM)$. На отрезке LM_1 возьмем точку M_2 и соединим ее с точками A, N_2 и C. Через M_3 обозначим точку пересечения $[KN)$ с $[AM_2]$; на отрезке KM_3 возьмем точку M_4, соединим ее с точками A, M_2 и C и т. д.

Продолжая этот процесс, мы получим (по той же причине, что и выше) искомую триангуляцию треугольника ABC на «большие» треугольники ABP, APN_2, CN_2P, AN_2M_2, CN_2M_2, ... (число треугольников может быть сделано каким угодно).

С. Фомин

◆

М397. *На плоскости даны три окружности одинакового радиуса. а) Докажите, что если они пересекаются в одной точке, как показано на рисунке 3, то сумма отмеченных дуг AK, CK, EK равна 180°. б) Докажите, что если они расположены так, как показано на рисунке 4, то сумма отмеченных дуг AB, CD, EF равна 180°.*

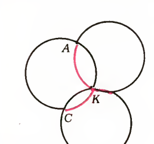


Рис. 3.

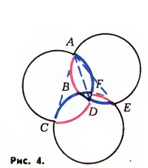


Рис. 4.

Мы решим задачу б); решение задачи а) точно такое же.

Прежде всего заметим, что дуги ABD и AFD конгруэнтны (рис. 4). Точно так же конгруэнтны дуги CBF и CDF и дуги EDB и EFB. Из этого легко вывести, что сумма отмеченных дуг AB, CD и EF равна сумме дуг DE, BC и AF (на рисунке 4 они синего цвета). В самом деле,

$$\smile AB + \smile CD + \smile EF = (\smile ABD - \smile BD) + (\smile CDF - \smile DF) + (\smile EFB - \smile BF) = (\smile AFD - \smile DF) + (\smile CBF - \smile BF) + (\smile EDB - \smile BD) = \smile AF + \smile BC + \smile DE.$$

Рассмотрим углы треугольника AEC. Имеем

$$\widehat{CAE} = \widehat{CAD} + \widehat{DAE} = \frac{1}{2}(\smile CD + \smile DE);$$

аналогично

$$\widehat{ACE} = \frac{1}{2}(\smile AF + \smile EF),$$

$$\widehat{AEC} = \frac{1}{2}(\smile BC + \smile AB).$$

Сумма углов треугольника равна 180°, то есть

$$180° = \widehat{CAE} + \widehat{ACE} + \widehat{AEC} = \frac{1}{2}(\smile CD + \smile DE + \smile AF + \smile EF + \smile BC + \smile AB) = \frac{1}{2}[(\smile AB + \smile CD + \smile EF) + (\smile AF + \smile BC + \smile DE)] = \frac{1}{2}\cdot 2(\smile AB + \smile CD + \smile EF),$$

откуда

$$\smile AB + \smile CD + \smile EF = 180°,$$

что и требовалось.

А. Толпыго

◆

М400. *Последовательность натуральных чисел a_1, a_2, ..., a_k назовем универсальной для заданного N, если из нее можно получить вычеркиванием части членов любую последовательность из N чисел, в которую каж-*

а) Выписав подряд N групп вида 1, 2, ..., N, мы получим универсальную последовательность длины N^2.

б) Вот пример N-универсальной последовательности длины $N^2 - N + 1$. Выпишем подряд $N - 1$ группу чисел 1, 2, ..., N и в конце припишем число 1. Докажем, что эта последовательность действительно является N-универсальной.

дое из чисел 1, 2, ..., N входит по одному разу.

а) *Приведите пример универсальной последовательности из N^2 членов.*

б) *Приведите пример универсальной последовательности из N^2-N+1 членов.*

в) *Докажите, что любая универсальная последовательность состоит не менее чем из $\frac{N(N+1)}{2}$ членов.*

г) *Докажите, что при $N=4$ самая короткая универсальная последовательность состоит из 12 членов.*

д) *Попробуйте найти для данного N как можно более короткую универсальную последовательность.*

Пусть $q=(b_1, b_2, \ldots, b_N)$ — произвольная *перестановка* чисел 1, 2, ..., N. Если эта перестановка вида $q=(N, N-1, \ldots, 1)$, то вычеркнем в нашей последовательности в первой группе все числа, кроме N, во второй — все числа, кроме $N-1$, и т. д. Если же q не такого вида, то для некоторого k будем иметь: $b_k < b_{k+1}$. В этом случае, если $i < k$, то вычеркнем в i-й группе нашей последовательности все числа, кроме числа b_i; в k-й группе вычеркнем все числа, кроме двух b_k и b_{k+1}, а если $j > k$, то вычеркнем в j-й группе все числа, кроме числа b_{j+1}. И, наконец, вычеркнем самое последнее число 1, — получим перестановку $q=(b_1, b_2, \ldots, b_N)$.

Для решения пункта д) нам понадобится некоторое обобщение этой конструкции*). А именно: пусть $1 \leqslant k \leqslant N$. Выпишем подряд $k-1$ группу чисел 1, 2, ..., N, а за ними укороченную k-ю группу вида 1, 2, ..., $N-k+1$ (например, при $N=5$, $k=3$ получим 1234512345123); получим последовательность длины $kN-k+1$. Совершенно аналогично доказывается, что из этой последовательности вычеркиванием части членов можно получить любую последовательность длины k, в которой встречаются числа 1, 2, ..., N — каждое не более одного раза. Такое свойство мы будем называть (N, k)-универсальностью.

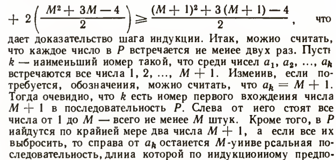
Построим теперь N-универсальную последовательность длины N^2-2N+4 (это является улучшением предыдущей оценки, начиная с $N=4$). Выпишем подряд $N-2$ группы чисел вида 1, 2, ..., $N-1$. За ними напишем укороченную $(N-1)$-ю группу, состоящую всего из двух чисел: 1 и 2. Затем вставим в эту последовательность N экземпляров числа N по следующему правилу: первый экземпляр напишем в самом начале, второй — в первой группе, после первого вхождения числа $N-1$, третий экземпляр — во второй группе, после второго вхождения в нашу последовательность числа $N-2$ и т. д. Последний, N-й экземпляр числа N вставим в последнюю укороченную группу после последнего вхождения числа 1 (например, при $N=5$ получим последовательность 5123451235412534152). Получим последовательность длины $(N-1)(N-2)+2+N=N^2-2N+4$; обозначим ее через P. Докажем, что последовательность P является N-универсальной. В самом деле, пусть q — произвольная перестановка чисел 1, 2, ..., N, и пусть число N встречается в последовательности q на k-м месте. Число N разбивает последовательность q на две части: *левую* — длины $k-1$ и *правую* — длины $N-k$. Нам нужно из P вычеркнуть часть членов так, чтобы получилась последовательность q. Вычеркнем сначала все экземпляры числа N, кроме k-го. Слева от невычеркнутого N останется, очевидно, $(N-1, k-1)$-универсальная последовательность, из которой вычеркиванием можно получить любую последовательность длины $(k-1)$, в которой встречаются лишь числа 1, 2, ..., $N-1$ — каждое не более одного раза. В частности, из нее можно получить стоящую слева от N часть последовательности q. Справа же от невычеркнутого в последовательности P числа N останется последовательность такого вида: группа из $(k-2)$-х чисел $(N-k+2)$, ..., $N-1$, ($k \geqslant 2$; случай $k=1$ разбирается аналогично), затем $(N-k-1)$ групп чисел 1, 2, ..., $N-1$ и, наконец, укороченная группа 1, 2. После перенумерации эта последовательность превращается в $(N-1, N-k)$-универсальную последовательность, из которой вычеркиванием можно получить часть последовательности q, стоящую от N справа. Значит, построенная последовательность P (длины N^2-2N+4) действительно N-универсальна.

Перейдем теперь к оценкам снизу. Мы решим одновременно пункты в) и г), доказав более сильное утверждение: *при $N \geqslant 2$ длина любой N-универсальной последовательности не меньше* $\frac{N^2+3N-4}{2}=\frac{N(N+1)}{2}+N-2$.

---

*) Изящное решение задачи д) прислали читатели А. Касянчук из Николаева и А. Мошонкин из Ленинграда.

Прежде всего заметим, что если число N впервые встречается в N-универсальной последовательности P на k-м месте, то часть P, расположенная справа от этого N, образует $(N-1)$универсальную последовательность, так как для получения любой перестановки чисел $1, 2, \ldots, N$, начинающейся с числа N, нужно вычеркнуть из P все числа с номерами до $k-1$-го включительно.



Будем доказывать утверждение по индукции. При $N=2$ оно легко проверяется. Пусть оно верно при $N=M$, и пусть $P=(a_1, \ldots, a_L)$ — произвольная $(M+1)$-универсальная последовательность. Если какое-то число встречается в P только один раз, то, изменив в случае необходимости обозначения, можно считать, что это число есть $M+1$, и тем самым справа и слева от него стоят M-универсальные последовательности; длина каждой из них по индукционному предположению не меньше $\dfrac{M^2+3M-4}{2}$ $(M \geqslant 3)$. Тогда (*длина* P) $\geqslant 1+$ $+\,2\left(\dfrac{M^2+3M-4}{2}\right) \geqslant \dfrac{(M+1)^2+3(M+1)-4}{2}$, что дает доказательство шага индукции. Итак, можно считать, что каждое число в P встречается не менее двух раз. Пусть k — наименьший номер такой, что среди чисел $a_1, a_2, \ldots, a_k$ встречаются все числа $1, 2, \ldots, M+1$. Изменив, если потребуется, обозначения, можно считать, что $a_k = M+1$. Тогда очевидно, что k есть номер первого вхождения числа $M+1$ в последовательность P. Слева от него стоят все числа от 1 до M — всего не менее M штук. Кроме того, в P найдутся по крайней мере два числа $M+1$, а если все их выбросить, то справа от a_k останется M-универсальная последовательность, длина которой по индукционному предположению не меньше, чем $(M^2+3M-4)/2$. Отсюда общая длина P не меньше $\dfrac{M^2+3M-4}{2}+M+2=$ $=\dfrac{(M+1)^2+3(M+1)-4}{2}$. Утверждение доказано. Применяя его в случае $N=4$, получим доказательство пункта г) (универсальную последовательность из 12 членов построить теперь легко; например, 123412314213).

Д. Бернштейн

◆

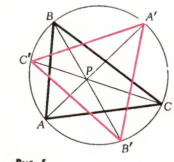


Рис. 5

М401. *Внутри остроугольного треугольника ABC дана точка P такая, что $\widehat{APB} = \widehat{ABC} + 60^\circ$, $\widehat{BPC} = \widehat{BAC} + 60^\circ$, $\widehat{CPA} = \widehat{CBA} + 60^\circ$. Докажите, что точки пересечения продолжений отрезков AP, BP, CP (за точку P) с окружностью, описанной вокруг $\triangle ABC$, лежат в вершинах равностороннего треугольника.*

Обозначим точки пересечения продолжений отрезков AP BP и CP с окружностью, описанной вокруг треугольника ABC, через A', B' и C' соответственно (см. рис. 5). Величина угла с вершиной в н у т р и круга равна полусумме угловых величин двух дуг, из которых одна заключена между сторонами этого угла, а другая — между продолжениями сторон; а величина вписанного угла равна половине угловой величины дуги, на которую он опирается. Поэтому $\widehat{APC} = \frac{1}{2}(\breve{AB'C} + \breve{A'BC'}) = \widehat{ABC} + \widehat{A'B'C'}$; но по условию $\widehat{APC} = \widehat{ABC} + 60^\circ$, откуда $\widehat{A'B'C'} = 60^\circ$.

Аналогично доказывается, что и $\widehat{A'C'B'} = \widehat{C'A'B'} = 60^\circ$.

А. Ягубьянц

◆

М402. *Докажите, что не существует строго возрастающей последовательности целых неотрицательных чисел $a_1, a_2, a_3, \ldots$, для которых при любых n и m выполняется соотношение*

$$a_{nm} = a_n + a_m.$$

П е р в о е р е ш е н и е. Заметим, что $a_{2^2} = a_2 + a_2 = 2a_2$, $a_{2^3} = a_{2^2\cdot 2} = 2a_2 + a_2 = 3a_2$, и вообще $a_{2^n} = na_2$ для любого n. Возьмем часть последовательности $a_1, a_2, a_3, \ldots, a_{2^n}$. Если последовательность строго возрастает, то, поскольку числа целые и неотрицательные, $a_{2^n} \geqslant 2^n$. С другой стороны, $a_{2^n} = na_2$. Значит, если такая последовательность $a_1, \ldots, a_n, \ldots$

существует, то для любого n должно выполняться неравенство $2^n \leqslant na_2$. Докажем, что это невозможно; именно, покажем, что отношение $\frac{2^n}{n}$ стремится к бесконечности с ростом n. Обозначим отношение $\frac{2^n}{n}$ через b_n и рассмотрим отношение $b_{n+1} : b_n$:

$$\frac{b_{n+1}}{b_n} = \frac{2^{n+1}}{n+1} : \frac{2^n}{n} = 2 \cdot \frac{n}{n+1} = 2\left(1 - \frac{1}{n+1}\right) \geqslant \frac{4}{3},$$

если $n \geqslant 2$. Из этого следует, что $\frac{b_n}{b_2} \geqslant \left(\frac{4}{3}\right)^{n-2}$, т. е. $b_n = \frac{2^n}{n} \geqslant 2 \cdot \left(\frac{4}{3}\right)^{n-2} > \left(\frac{4}{3}\right)^{n-2}$. Очевидно, что $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\frac{4}{3}\right)^{n-2} = \infty$, следовательно, $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{2^n}{n} = \infty$.

Значит, строго возрастающей последовательности $a_1, \ldots, a_n, \ldots$, о которой говорится в условии, быть не может.

Второе решение. Предположим, что такая последовательность существует. Пусть n — натуральное число, большее, чем a_2. Тогда $a_{2n} = a_n + a_2 < a_n + n$; значит, натуральные числа $a_{n+1}, a_{n+2}, \ldots, a_{2n}$ лежат в промежутке $[a_n + 1, a_n + n - 1]$ и различны, чего не может быть, так как в этом промежутке всего $n - 1$ целое число.

С. Фомин

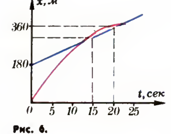


Рис. 6.

◆

Ф407. *Машинист пассажирского поезда, двигавшегося со скоростью $v_1 = 108$ км/час, заметил на расстоянии $s_0 = 180$ м впереди движущийся в ту же сторону со скоростью $v_2 = 32{,}4$ км/час товарный поезд. Машинист сразу включил тормоз, благодаря чему пассажирский поезд начал двигаться с ускорением $a = -1{,}2$ м/сек². Достаточно ли этого ускорения для того, чтобы поезда не столкнулись?*

Нарисуем графики зависимости координат поездов от времени. За начало отсчета выберем точку, в которой началось торможение пассажирского поезда, а за направление оси координат примем направление скоростей поездов. В такой системе координаты поездов в момент времени t равны

$$x_{\text{пас}} = v_1 t + \frac{at^2}{2},$$

$$x_{\text{тов}} = v_2 t + s_0,$$

где $v_1 = 108$ км/час $= 30$ м/сек, $v_2 = 32{,}4$ км/час $= 9$ м/сек.

Из графиков (рис. 6) видно, что в моменты времени t' и t'' координаты поездов равны. Это означает, что в момент $t = t'$ произойдет столкновение поездов. Найдем значения t' и t'' из условия $x_{\text{пас}} = x_{\text{тов}}$:

$$30t - 0{,}6t^2 = 9t + 180, \quad \text{или} \quad t^2 - 35t + 300 = 0,$$

откуда $t' = 15$ сек, $t'' = 20$ сек.

Координаты поездов в момент $t = t'$ равны $x_{\text{пас}} = x_{\text{тов}} = 315$ м.

◆

Ф408. *Из сопротивлений в 1, 2, 3 и 4 ом собрана схема, показанная на рисунке 7. Какой ток течет через амперметр A_2, если ток через амперметр A_1 5а? Показания вольтметра 10 в. Измерительные приборы идеальные.*

Согласно показаниям вольтметра и амперметра A_1, сопротивление всей изображенной на рисунке 7 цепи $R = \frac{U}{I} = 2$ ом.

Найдем, каковы при этом сопротивления R_1, R_2, R_3 и R_4. Так как амперметр A_2 идеальный, его сопротивление можно считать равным нулю, и точки a и b при расчете сопротивлений можно считать соединенными друг с другом накоротко. Положим $R_1 = 1$ ом. Тогда простым перебором убеждаемся в том, что $R_2 = 4$ ом, а для сопротивлений R_3 и R_4 возможны два варианта: или $R_3 = 2$ ом и $R_4 = 3$ ом, или $R_3 = 3$ ом и $R_4 = 2$ ом.

Рассмотрим точку разветвления цепи, например, точку a. Алгебраическая сумма токов, сходящихся в этой точке, равна нулю:

$$I_1 - I_3 - I_5 = 0. \qquad (*)$$

Следовательно, чтобы определить ток I_5, текущий через амперметр A_2, достаточно знать токи I_1 и I_3. Найдем их.

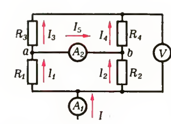


Рис. 7.

Токи I_1 и I_2, текущие по сопротивлениям R_1 и R_2, обратно пропорциональны значениям этих сопротивлений:

$$\frac{I_1}{I_2}=\frac{R_2}{R_1}=\frac{4}{1}.$$

В то же время

$$I_1+I_2=I=5a.$$

Отсюда

$$I_1=4a.$$

Аналогично можно записать соответствующие выражения для токов I_3 и I_4:

$$\frac{I_3}{I_4}=\frac{R_4}{R_3} \text{ и } I_3+I_4=I.$$

Если $R_3 = 2$ *ом* и $R_4 = 3$ *ом*, то

$$\frac{I_3}{I_4}=\frac{3}{2} \text{ и } I_3+I_4=I=5a,$$

откуда

$$I_3 = 3\ a.$$

Тогда из равенства (*)

$$I_5 = I_1 - I_3 = 1a.$$

Если же $R_3 = 3$ *ом* и $R_4 = 2$ *ом*, то

$$I_3 = 2a, \text{ и } I_5 = 2\ a.$$

Таким образом, возможны два значения для тока, текущего через амперметр A_2.

И. Слободецкий

◆

Ф410 *). *В электровакуумном приборе чистый вольфрамовый катод находится в большой колбе, содержащей остатки кислорода при давлении* $p=10^{-7}$ *атм и температуре* $T=300°$K. *Считая, что каждая молекула, попавшая на катод, прилипает к нему, оценить время образования мономолекулярного слоя. Молекулы можно считать шариками диаметром* $d\approx$ $\approx 3\cdot10^{-8}$ *см.*

Найдем среднее число молекул z, которые за время $t = 1$ *сек* оседают на единице площади поверхности катода. Для оценки воспользуемся упрощенной моделью газа, согласно которой все молекулы в сосуде двигаются по трем взаимно перпендикулярным направлениям (в обе стороны по каждому направлению) со средней квадратичной скоростью $\bar{v}$. Пусть среднее число молекул в единице объема (концентрация молекул) равно n. Из общего числа молекул в сторону катода двигается 1/6 часть. Единичная площадка катода за время t соберет все молекулы, оказавшиеся в столбике единичного сечения и высоты $\bar{v}t$. Отсюда

$$z=\frac{n}{6}\bar{v}.$$

Более точное выражение, учитывающее движение молекул по всевозможным направлениям и с разными по абсолютной величине скоростями, имеет вид $z=\frac{n}{4}\bar{v}$. Это различие в числовом коэффициенте несущественно, поскольку по условию задачи мы должны дать лишь приближенную оценку результата по порядку величины.

Средняя квадратичная скорость молекул

$$\bar{v}=\sqrt{\frac{3kT}{m}},$$

где $k = 1{,}38\cdot10^{-23}$ *дж/град* — постоянная Больцмана, $T =$ $= 300°$K — абсолютная температура газа, $m=\frac{\mu}{N_A}=$ $= 5{,}3\cdot10^{-26}$ *кг* — масса молекулы кислорода. Концентрацию молекул можно выразить через давление газа и его температуру:

$$n=\frac{p}{kT}.$$

Подстановка числовых значений в выражения для $\bar{v}$ и n дает

$$\bar{v}\approx 5\cdot10^2\ м/сек,\quad n\approx 2{,}5\cdot10^{18}\ м^{-3}.$$

*) Решение задачи Ф409 см. в статье П. Блиоха «В фокусе линзы», «Квант», 1976, № 10.

Таким образом

$$z = \frac{n}{6}\bar{v} \approx 2\cdot 10^{20}\ м^{-2}\cdot сек^{-1}.$$

Число молекул z_0 в мономолекулярном слое, покрывающем площадь в 1 $м^2$, можно оценить по формуле

$$z_0 \approx \frac{1}{d^2} \approx 10^{19}\ м^{-2}.$$

Для осаждения такого количества молекул необходимо время

$$\tau = \frac{z_0}{z} \approx 5\cdot 10^{-2}\ сек.$$

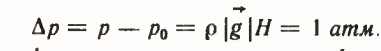
Приведенные выше оценки являются достаточно грубыми. Мы не учитывали, например, возможности более плотной упаковки молекул или неравномерного образования слоев. Для вычисления z была использована упрощенная модель газа. Поэтому полученный результат верен только по порядку величины. Оценки такого рода в реальных физических задачах играют важную роль, поскольку они позволяют ориентироваться в масштабах изучаемого явления.

С. Козел

Ф411. *Одним U-образным ртутным манометром можно измерять давления до 1 атм. Какое наибольшее давление можно измерить, если соединить последовательно два таких манометра короткой трубкой?*



U-образный ртутный манометр (рис. 8) измеряет избыточное давление Δp, т. е. показывает, на сколько давление p в левом колене манометра больше атмосферного давления p_0. Ограничение на измеряемое давление накладывается длиной трубок манометра: нельзя измерить избыточное давление больше такого, при котором ртуть доходит до края правого колена. Иначе манометр выйдет из строя. Отсюда ясно, что



$$\Delta p = p - p_0 = \rho|\vec{g}|H = 1\ атм.$$

Пусть атмосферное давление тоже равно 1 *атм*. Тогда

$$\rho|\vec{g}|H = p_0.$$

Рис. 8.

При последовательном соединении двух манометров (рис. 9) давление p_1 в левом колене манометра *1* будет больше давления p в случае одного манометра. В самом деле, давление p_2 в левом колене манометра *2* не равно атмосферному, а больше его на величину давления столба ртути высотой h. Таким образом,

$$p_1 = \rho|\vec{g}|H + p_2 = p_0 + p_2, \qquad (1)$$

и

$$p_2 = p_0 + \rho|\vec{g}|h. \qquad (2)$$

С другой стороны, p_2 — это давление сжатого воздуха, занимающего объем $S(H/2 + h/2)$ (S — площадь сечения трубок). Первоначально этот воздух занимал объем $SH/2$ в правом колене манометра *1* и такой же объем в левом колене манометра 2. Давление воздуха было равно p_0. Полагая сжатие воздуха изотермическим, запишем такое соотношение:

$$\frac{p_2}{p_0} = \frac{2S\,H/2}{S\,(H/2 + h/2)},$$

откуда

$$p_2 = 2p_0\frac{H}{H+h}.$$

Умножим числитель и знаменатель в правой части этого равенства на $\rho|\vec{g}|$:

$$p_2 = 2p_0\frac{\rho|\vec{g}|H}{\rho|\vec{g}|H + \rho|\vec{g}|h} = 2\frac{p_0^2}{p_0 + \rho|\vec{g}|h}. \qquad (3)$$

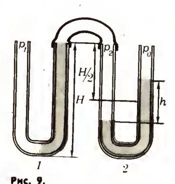


Рис. 9.

Из равенств (2) и (3) получаем

$$p_2^2 = 2p_0^2, \text{ или } p_2 = \sqrt{2}\, p_0.$$

Тогда из равенства (1)

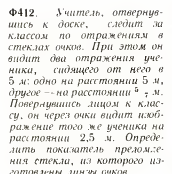
$$p_1 = (1+\sqrt{2})\, p_0 \approx 2{,}4 \text{ атм},$$

т. е. давление p_1 может превышать атмосферное давление на величину

$$\Delta p_1 = p_1 - p_0 \approx 1{,}4 \text{ атм}.$$

И. Слободецкий

◆



Ф412. *Учитель, отвернувшись к доске, следит за классом по отражениям в стеклах очков. При этом он видит два отражения ученика, сидящего от него в 5 м: одно на расстоянии 5 м, другое — на расстоянии 5/7 м. Повернувшись лицом к классу, он через очки видит изображение того же ученика на расстоянии 2,5 м. Определить показатель преломления стекла, из которого изготовлены линзы очков.*

Показатель преломления стекла n можно найти из формулы для оптической силы линзы

$$D = (n-1)\left(\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2}\right), \qquad (1)$$

если знать оптическую силу D линзы и радиусы R_1 и R_2 ее сферических поверхностей.

Рассмотрим, как получаются изображения ученика, когда учитель следит за ним, отвернувшись к доске. Одно изображение образовано лучами, отраженными от передней (ближайшей к глазу) поверхности очковых линз. Другое создают лучи, прошедшие линзу, отразившиеся от ее задней поверхности и вновь прошедшие линзу.

По условию задачи расстояние до одного из этих изображений равно расстоянию до ученика: $f_1 = d = 5$ м. Это характерно, прежде всего, для плоского зеркала (рис. 10). Поэтому естественно предположить, что передняя поверхность очковых линз плоская, и

$$\frac{1}{R_1} = 0.$$

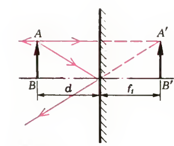


Рис. 10.

Изображение, находящееся на расстоянии $f_2 = 5/7$ м, создано оптической системой линза — зеркало — линза. Эту систему можно заменить одной эквивалентной линзой. Ее оптическая сила равна алгебраической сумме оптических сил элементов системы:

$$D + \frac{2}{R_2} + D = 2D + \frac{2}{R_2}.$$

Тогда по формуле линзы

$$\frac{1}{d} - \frac{1}{f_2} = 2D + \frac{2}{R_2}. \qquad (2)$$

Знак «минус» перед величиной $1/f_2$ стоит потому, что изображение мнимое.

Когда учитель смотрит на ученика через очки, он видит его мнимое изображение на расстоянии $f_3 = 2{,}5$ м (рис. 11). Для этого случая формула линзы запишется так:

$$\frac{1}{d} - \frac{1}{f_3} = D. \qquad (3)$$

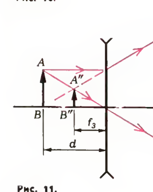


Рис. 11.

Из равенств (2) и (3)

$$D = -\frac{1}{5} \text{ дптр} \quad \text{и} \quad \frac{1}{R_2} = -\frac{2}{5}\,\frac{1}{\text{м}}.$$

Как и следовало ожидать, мы получили, что зеркало выпуклое, а линза, соответственно, плоско-вогнутая.

Подставляя значения D, $1/R_1$ и $1/R_2$ в формулу (1), найдем

$$n = 1{,}5.$$

Если предположить, что после отражения от передней поверхности линзы изображение оказывается на расстоянии $5/7$ м, и провести соответствующие вычисления, то придем к нелепому результату $n = 0{,}75$. Убедитесь в этом самостоятельно.

В. Белонучкин

А. Виленкин, Ю. Ионин

Площадь и интеграл

Из статьи В. Болтянского «О понятиях площади и объема», помещенной в этом номере, вы узнали об определении и различных способах вычисления площадей. Наиболее универсальным из них является применение интегрального исчисления. Об этом способе и пойдет речь в настоящей статье (она рассчитана на десятиклассников). Но сначала советуем вам заглянуть в учебник «Алгебра и начала анализа 10» и просмотреть еще раз пункты 97—102 и таблицу первообразных на с. 219.

Площадь — это интеграл

Рассмотрим криволинейную трапецию на рисунке 1. Эта фигура ограничена графиком непрерывной неотрицательной функции $y = f(x)$, определенной на отрезке $[a; b]$, прямыми $x = a$, $x = b$ и осью абсцисс $y = 0$. Ее площадь S равна

$$F(b) - F(a),$$

где F — какая-нибудь первообразная для функции f («Алгебра и начала анализа 10», п. 100). Вспоминая определение интеграла («Алгебра и начала анализа 10», п. 101), формулу для вычисления площади можно переписать так:

$$S = \int_a^b f(x)\,dx. \qquad (1)$$

Пример 1. *Найти площадь фигуры, ограниченной линиями $y = 1 - x^2$ и $y = 0$.*

Можно считать, что эта фигура ограничена осью абсцисс, прямыми $x = -1$, $x = 1$ и графиком функции $y = 1 - x^2$ (рис. 2), поэтому по формуле (1) ее площадь

$$S = \int_{-1}^{1} (1 - x^2)\,dx.$$

Так как первообразной для функции $f(x) = 1 - x^2$ является функция

$$F(x) = x - \frac{x^3}{3},$$

то

$$S = \left(x - \frac{x^3}{3}\right)\Big|_{-1}^{1} = \frac{4}{3}.$$

Вы видите, что в этом примере нам не пришлось прибегать ни к каким «ухищрениям»; для решения задачи оказалось достаточным воспользоваться готовыми формулами. Но так бывает далеко не всегда.

Аддитивность

Решать более сложные задачи на вычисление площадей помогает свойство *аддитивности* площади. Оно «разрешает» разбить данную фигуру на части и подсчитать площадь всей фигуры как сумму площадей этих частей.

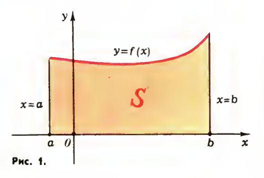


Рис. 1.

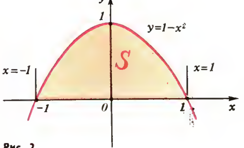


Рис. 2.

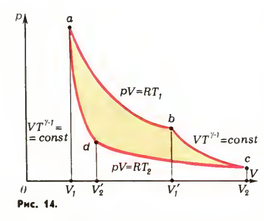


Рис. 14.

пературе T_1. При этом газ совершает работу

$$A_1=\int_{V_1}^{V_1'} p(V)\,dV.$$

Поскольку $pV=RT_1$, получаем:

$$A_1=\int_{V_1}^{V_1'} \frac{RT_1}{V}\,dV=RT_1 \ln V\,\Big|_{V_1}^{V_1'}=$$

$$=RT_1 \ln V_1'-RT_1 \ln V_1=RT_1 \ln \frac{V_1'}{V_1},$$

причем эта работа A_1 равна количеству теплоты Q_1, полученной газом от нагревателя; внутренняя энергия газа на этом участке не изменяется.

На участке *bc* происходит адиабатическое расширение газа до объема V_2, при этом его температура понижается от T_1 до T_2. На этом участке $VT^{\gamma-1}$ постоянно *), газ совершает работу A_2 без теплообмена с посторонними источниками тепла, т. е. за счет изменения лишь своей внутренней энергии, пропорционального разности температур, поэтому

$$A_2 = k(T_1-T_2)$$

(коэффициент k равен $R(\gamma-1)$, но мы доказывать это не будем).

На участке *cd* газ изотермически сжимается (внешними силами) до объема V_2', поэтому совершаемая газом работа отрицательна и равна

$$A_3=RT_2 \ln \frac{V_2'}{V_2},$$

причем эта работа A_3 равна (по модулю) количеству теплоты Q_2, переданному газом холодильнику.

На участке *da* происходит адиабатическое сжатие газа, при котором его температура повышается от T_2 до T_1, причем, чтобы это сжатие было возможным, V_2' должно удовлетворять равенству $V_2'T_2^{\gamma-1}=V_1T_1^{\gamma-1}$. На этом участке газ совершает (отрицательную) работу A_4 за счет изменения лишь своей внутренней энергии, поэтому

$$A_4=k(T_2-T_1).$$

Цикл Карно на этом завершается, и мы получаем, что газ совершил работу

$$A_1+A_2+A_3+A_4=$$

$$=RT_1 \ln \frac{V_1'}{V_1}+RT_2 \ln \frac{V_2'}{V_2}.$$

Поскольку $V_1'T_1^{\gamma-1}=V_2T_2^{\gamma-1}$, $V_2'T_2^{\gamma-1}=V_1T_1^{\gamma-1}$, мы получаем, что $\frac{V_1'}{V_1}=\frac{V_2}{V_2'}$. Обозначим это отношение через r, $r>1$. Тогда $\ln\frac{V_2'}{V_2}=-\ln r$ и

$$A=R(T_1-T_2)\ln r.$$

Это — полезная работа, совершенная газом, а всего газ получил от нагревателя количество теплоты $Q_1=RT_1 \ln r$, а отдал холодильнику соответственно $Q_2=RT_2 \ln r$. Тем самым к. п. д. цикла Карно равен

$$\frac{Q_1-Q_2}{Q_1}=\frac{T_1-T_2}{T_1}.$$

Упражнения

Найдите площади фигур, ограниченных следующими линиями:

1. $y=\cos^2 x-\sin^2 x$, $y=0$, $x=0$, $x=\pi/4$.
2. $y=|x|+1$, $y=0$, $x=-2$, $x=1$.
3. $y=x^2$, $y=1$.
4. $x=y^2$, $x=0$, $y=2$, $y=-2$.
5. $y=\sin x$, $y=x^2-\pi x$.
6. $y=|x^2-1|$, $y=0$, $x=-2$, $x=2$.
7. $y=x^2$, $y=\sqrt{x}$.

*) Здесь $\gamma=C_p/C_V$ (см. И. К. Кикоин, А. К. Кикоин, Молекулярная физика, М., «Наука», 1976); в будущем мы подробно расскажем об адиабатическом процессе.

Улитка Паскаля

Свое название улитка Паскаля получила*) не в честь великого Блеза Паскаля, а в честь его отца Этьена Паскаля (1588—1651) — провинциального французского судьи и бо́льшого любителя математики. Э. Паскаль строил улитку так.

Нарисуем на плоскости окружность $(O,\ r)$, зададим некоторую длину d, выберем на этой окружности произвольно точку P и зафиксируем ее — это будет полюс улитки Паскаля. Для каждой точки K окружности, отличной от P, проведем прямую KP и отложим на ней в противоположные стороны от точки K отрезки M_1K и KM_2 такие, что $|M_1K|=|KM_2|=d$ (рис. 1). Множество таких точек M_1 и M_2 образует непрерывную замкнутую кривую, которая и называется улиткой Паскаля. Полюс P может не принадлежать, а может и принадлежать улитке, обеспечивая непрерывность кривой.

Улитка Паскаля имеет принципиальное отличие от кривых, которые приводились на первой или второй страницах обложки «Кванта» за этот год,— форма у нее переменная.

Ее форма зависит от значения d (рис. 2): при $d=0$ улитка совпадает с $(O,\ r)$, при $0<d<2r$ имеет точку самопересечения P, при $d=2r$ превращается в кардиоиду, при $d>2r$ не содержит своего полюса P.

*) По предложению видного французского математика — одного из основателей Парижской академии наук Ж. П. Роберваля (1602—1675)

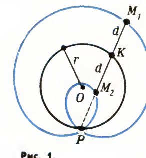


Рис. 1.

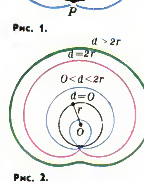


Рис. 2.

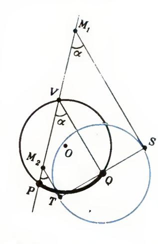


Рис. 3.

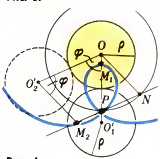


Рис. 4.

Приведем идею, на которой основан второй способ построения улитки (рис. 3). Вновь рассмотрим окружность $(O,\ r)$, на ней полюс P и фиксированную точку Q, а также окружность $(Q,\ R)$ некоторого радиуса R. Пусть $\breve{PQ}=2\alpha$. Для каждой точки $V\in(O,\ r)$ проведем прямую PV и найдем на ней точки M_1 и M_2 такие, что если провести из них касательные к $(Q,\ R)$ и затем повернуть их на угол α по часовой стрелке, то они попадут на PV. Множество таких точек M_1 и M_2 — улитка Паскаля, причем $d=R/\sin\alpha$.

На рисунке 4 обосновывается еще одно построение улитки Паскаля. Подвижная окружность $(O',\ \rho)$ касается снаружи неподвижной («опорной») (O, ρ). Покажем, что при качении (O', ρ), жестко с ней связанная точка M описывает улитку Паскаля.

Пусть длина отрезка MO минимальна ($M=M_1$). Выберем на прямой OO'_1 точку P, для которой $|OP|=|O'_1M_1|$, и построим окружность $(O,\ |OP|)$. Если подвижная окружность прокатывается на угол φ из начального положения, то точки O' и M попадают соответственно в положения O'_2 и M_2. Проведем прямую M_2P и найдем точку ее пересечения N с окружностью $(O,\ |OP|)$. Получаем $|ON|=|OP|=|M_1O'_1|=|M_2O'_2|$. Четырехугольник $ONM_2O'_2$ (при таком расположении точки N, как на рисунке 4) представляет собой объединение равнобедренной трапеции $OPM_2O'_2$ ($\widehat{POO'_2}=\widehat{OO'_2M_2}=\varphi$) и равнобедренного треугольника PON. Ясно, что этот четырехугольник — параллелограмм, причем длины его сторон не зависят от угла φ. Раз отрезок NM сохраняет постоянную длину при любом положении точки M, то в траектории точки M мы узнаем улитку Паскаля, в точке P — ее полюс, а в $(O, |OP|)$ — окружность (O, r).

В. Березин

Задачи

1. В этом ребусе (см. рисунок) цифры зашифрованы фигурками. Одинаковым фигуркам соответствуют одинаковые цифры, разным — разные, ни одно число не начинается нулем. Расшифруйте ребус.

2. Жили-были дед да баба. Была у них курочка ряба. Принесла курочка задачку. Задачка не простая, с изюминкой.

100 яичек лежат по кругу. Их начинают забирать так: первое оставляют, следующее за ним по часовой стрелке (второе) — забирают, следующее за ним (третье) — не берут, четвертое — забирают и так далее через одно по кругу. Круг сужается до тех пор, пока в нем не останется только одно яйцо. На каком месте сначала лежало это яйцо (считая от первого по часовой стрелке)?

Дед решал, решал — не решил. Баба решала, решала — не решила. Мышка по кругу побегала, хвостиком помахала и задачку решила.

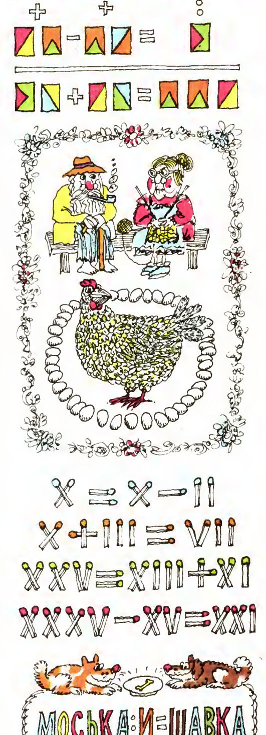
Дед и баба плачут. Курочка кудахчет:

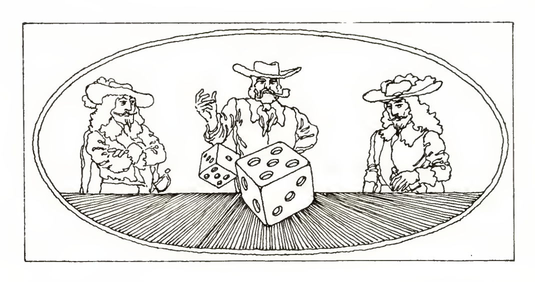
— Не плачь, дед, не плачь, баба, — принесу вам задачку другую, не с изюминкой — простую.

Курочка несет каждое второе яичко — простое, а каждое третье — золотое. Может ли так быть?

3. В следующих «равенствах», сложенных из спичек (см. рисунок), допущены ошибки. Переложите в каждом из «равенств» по две спички так, чтобы все они стали верными.

4. В этом примере на деление (см. рисунок) разными буквами зашифрованы разные цифры, одинаковыми — одинаковые. Расшифруйте пример!





Е. Турецкий, Н. Цейтлин

Семиклассникам о вероятности

В предлагаемой статье почти нет определений и той математической «строгости», которой отличаются статьи для старшеклассников. Авторы просто дают читателям почувствовать, что такое «вероятность».

Тем не менее, чтение статьи без карандаша и бумаги может оказаться затруднительным. Что ж, возьмите карандаш и бумагу и приступайте...

Почему побеждала команда Виктора

Сам он не отличался особым рывком и сильным ударом, но его команда, подобранная «по жребию», почти не знала поражений. Перед игрой ребята разбивались на пары, сговаривались об условных кличках, подходили к капитанам будущих команд — Виктору и Юре — и спрашивали: «Олень или книга?», «Паяльник или сабля?» и т. п. Капитаны поочередно отвечали: «олень», «сабля», — и получали в свою команду соответствующего игрока, а их соперник — его напарника. Но в итоге Виктор обычно возглавлял лучшую команду.

Это было удивительно: ведь тайна кличек до выбора игроков не могла быть известна никому. И все-таки Виктор обычно собирал лучших.

А все дело было в том, что ребята невольно выбирали себе те клички, которые им чем-то нравились. Виктор, хорошо зная ребят, обычно угадывал, кто «олень», а кто «сабля», и выбирал из них лучшего. А Юра (если в этот момент выбор производил он) просто называл одну из кличек, не раздумывая, кто за ней скрывается. Можно сказать, что выбор игрока был случайным для Юры, выбиравшего в половине случаев лучшего игрока, а в половине — худшего, и не случайным для Виктора, почти всегда выбиравшего лучшего игрока. Победа команды Виктора демонстрировала практическую важность одного из самых интересных разделов математики — *теории вероятностей*.

Интересно, что эта теория многим обязана играм, которым предавались не только дети, но и вполне взрослые люди.

Редкий ход

«Атос отправился на поиски англичанина и нашел его в конюшне: тот с вожделением разглядывал седла. Случай был удобный. Атос предложил свои условия: два седла против одной лошади или ста пистолей — на выбор. Англичанин быстро подсчитал: два седла стоили вместе триста пистолей. Он охотно согласился.

Д'Артаньян, дрожа, бросил кости — выпало три очка; его бледность испугала Атоса, и он ограничился тем, что сказал:

Результаты 36 бросаний двух кубиков.

Таблица 1

1	2	4	7	6	6	13	6	3	19	1	3	25	5	6	31	2	6
2	6	3	8	3	4	14	3	5	20	4	1	26	3	5	32	1	4
3	5	2	9	6	3	15	3	2	21	5	6	27	2	1	33	6	3
4	5	2	10	4	5	16	4	1	22	2	5	28	4	1	34	3	1
5	6	6	11	5	5	17	4	2	23	2	5	29	5	4	35	3	2
6	1	2	12	5	6	18	2	6	24	1	1	30	1	5	36	4	5

— Неважный ход, приятель, ... Вы, сударь, получите лошадей с полной сбруей.

Торжествующий англичанин даже не потрудился смешать кости; его уверенность в победе была так велика, что он бросил их на стол не глядя. Д'Артаньян отвернулся, чтобы скрыть досаду.

— Вот так штука, — как всегда, спокойно проговорил Атос. — Какой необыкновенный ход! Я видел его всего четыре раза за всю мою жизнь: два очка!

Англичанин обернулся и онемел от изумления; Д'Артаньян обернулся и онемел от радости».

Давайте, и мы с вами бросим несколько раз пару костей — кубиков из детских игр с цифрами или точками (очками) от 1 до 6 на гранях — и посмотрим, часто ли выпадают две единицы. Чтобы различать эти кубики, один из них закрасим красной краской, а другой — синей. В таблице 1 приведены результаты 36 бросаний красного и синего кубиков, выполненных нами.

Таблица 2

Появление отдельных очков при 36 бросаниях двух кубиков.

очки / кубики	1	2	3	4	5	6
красный	5	6	6	6	7	6
синий	6	6	5	4	8	7

У вас, конечно, получатся другие результаты, но если вы сведете свои результаты в таблицы (2 и 3), то скорее всего выводы будут те же, что и у нас.

Выводы

1. Дубль 1—1 выпадает не часто (у нас — один раз из 36).

2. Разные очки выпадают примерно одинаково часто, в среднем — в 1/6 части случаев каждое.

3. Сумма очков на двух костях обычно заключена в пределах от 5 до 9.

Если увеличить число бросаний, то отмеченные закономерности проступят еще более четко. Чем больше число бросаний, тем меньше будут

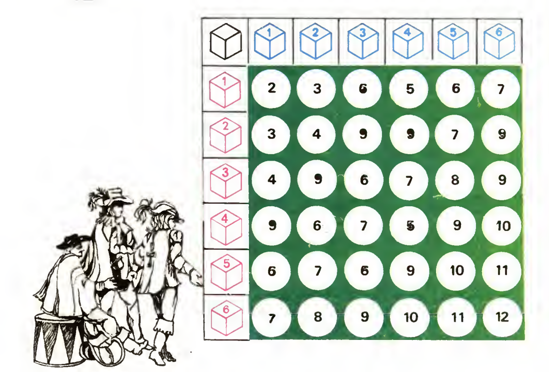
Появление отдельных сумм очков при 36 бросаниях двух кубиков.

Таблица 3

Σ	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
кратность	1	2	2	6	3	5	4	7	1	3	2

Таблица

Сумма очков на костях при всех возможных исходах бросания двух кубиков



	1	2	3	4	5	6
1	2	3	6	5	6	7
2	3	4	9	9	7	9
3	4	9	6	7	8	9
4	9	6	7	5	9	10
5	6	7	6	9	10	11
6	7	8	9	10	11	12

отличаться от 1/6 (среднего значения) частоты выпадений различных очков от 1 до 6. Можно сказать, что выпадение любого из шести очков при бросании симметричной кости равновероятно. А вот появления разных значений сумм очков при бросании двух костей оказываются не равновероятными.

Можете ли вы сказать, почему?

Давайте составим таблицу всех возможных исходов при бросании красной и синей костей. Так как выпадение любого числа очков от 1 до 6 на красной кости может сочетаться с любым числом очков на синей кости, то у нас получится таблица 4.

Любое из 36 сочетаний очков на красной и синей костях равновероятно любому другому сочетанию, но разные суммы очков могут быть получены различным числом способов. Так, сумма очков 3 (у Д'Артаньяна) получается двумя способами: $1+2$ и $2+1$, а сумма 2 (у англичанина) — лишь одним (из 36!): $1+1$. Атосу было чему удивляться!

Вероятность

Вы видите, что выпадения 2 и 6 очков на одной кости равновероятны, а выпадение суммы 2 и 7 на двух костях не равновероятны. В подобных случаях говорят, что сумме 7 *благоприятствует* больше исходов из общего числа равновероятных исходов, чем сумме 2. Так, сумме 7 благоприятствуют шесть исходов из общего числа равновероятных исходов, равного 36, тогда как сумме 2 благоприятствует лишь один исход.

И в общем случае подсчет числа благоприятных исходов из их общего числа — важнейшее действие для определения в е р о я т н о с т и события, под которой понимают *отношение числа благоприятных исходов к общему числу равновероятных исходов*. При этом используются такие обозначения. Само событие (например, появление суммы 7) обозначается буквой A, а вероятность этого события — $P(A)$. Итак,

$$P(A)=\frac{m}{n}, \qquad (*)$$

где n — общее число исходов данного опыта, а m — число исходов, благоприятствующих событию A.

Попробуем подсчитать вероятности некоторых событий.

В таблице 4 всего 36 клеток. Это — 36 возможных исходов при бросании двух кубиков. Сумме очков 7 (событие A) благоприятствуют 6 исходов. По формуле (*) получаем: $P(A) = 6/36 = 1/6$.

Сумме очков 2 (событие B) благоприятствует 1 исход. По формуле (*) $P(B) = 1/36$.

Событию C «выпадение суммы очков, не большее 5» благоприятствуют 10 исходов (укажите их самостоятельно), поэтому $P(C) = 10/36 = 5/18$.

Событию D «выпадение суммы очков, большее 5» благоприятствуют 26 исходов (все не вошедшие в C), поэтому $P(D) = 26/36 = 13/18$.

Событию E «выпадение четного числа очков на красной кости и кратного трем — на синей» благоприятствуют 6 исходов, поэтому $P(E) = 6/36 = 1/6$.

Таким образом, при определении вероятности некоторого события A надо провести три действия:

(а) *определить общее число (равновероятных) исходов опыта*;

(б) *определить число исходов, благоприятствующих событию A*;

(в) *разделить второе число на первое*.

Подчеркнем, что мы с самого начала считаем («по определению»), что исходы опыта равновероятны. Это соответствует практическим результатам, если опыт обладает некоторой симметрией (кость имеет форму гексаэдра — куба, а не, скажем, косого параллелепипеда и не налита свинцом у одной грани, монета — новая, не истертая, то есть имеет форму цилиндра и т. п.). Из-за этого нельзя, скажем, считать, что в опыте «определение суммы на двух костях» всего 11 исходов (суммы от 2 до 12) — они неравноправны, вероятность каждого из них не 1/11. Определение таких «хороших» исходов опыта — существенная часть пункта (а) задачи определения вероятностей, и руководствоваться здесь надо физическими или житейскими соображениями.

Как считать вероятность

Конечно, можно считать ее по формуле (*), но нередко удобнее применять три свойства вероятности, о которых мы сейчас и расскажем.

Рассмотрим еще раз событие C «выпадение суммы очков, не большее 5» (при бросании двух костей).

Можно сказать, что это событие C состоит из событий:

C_1 — «выпадение суммы 2»;
C_2 — «выпадение суммы 3»;
C_3 — «выпадение суммы 4»;
C_4 — «выпадение суммы 5».

Давайте найдем вероятности этих событий и попробуем установить связь между ними и вероятностью $P(C)$, которая нам уже известна: $P(C) = 10/36$.

Из 36 равновероятных исходов ($n = 36$) событию C_1 благоприятствует один исход: $1 + 1$. Значит, $P(C_1) = 1/36$.

Событию C_2 благоприятствуют два исхода: $1 + 2$ и $2 + 1$, поэтому $P(C_2) = 2/36$.

Событию C_3 благоприятствуют три исхода: $1 + 3$, $2 + 2$ и $3 + 1$, поэтому $P(C_3) = 3/36$.

Наконец, событию C_4 благоприятствуют четыре исхода: $1 + 4$, $2 + 3$, $3 + 2$, $4 + 1$, поэтому $P(C_4) = 4/36$.

Вас, конечно, не затруднит установление связи между числом 10/36 и числами 1/36, 2/36, 3/36 и 4/36. Она очень проста:

$$\frac{10}{36} = \frac{1}{36} + \frac{2}{36} + \frac{3}{36} + \frac{4}{36},$$

или

$$P(C) = P(C_1) + P(C_2) + P(C_3) + P(C_4).$$

Полученное равенство выражает *теорему сложения вероятностей*, состоящую в том, что если одно событие C разбивается на ряд других событий (C_1, C_2, C_3, C_4), то его вероятность $P(C)$ равна сумме вероятностей составляющих событий.

Теперь рассмотрим событие C и событие D «выпадение суммы очков, большее 5». Их вероятности $P(C) =$

$= 10/36$ и $P(D) = 26/36$ связаны очевидным равенством: $P(C) + P(D) = 1$. Это и понятно: событию D благоприятствуют те и только те исходы, которые не благоприятствуют событию C (такие события называются «противоположными»). Поэтому, если $P(C) = m/n$, то $P(D) = (n - m)/n = 1 - m/n = 1 - P(C)$. Можно также воспользоваться теоремой сложения вероятностей. Событие «не C», противоположное событию C, обозначается так: $\overline{C}$ (у нас $D = \overline{C}$, $C = \overline{D}$). События C и $\overline{C}$ вместе составляют событие «C или $\overline{C}$», которое произойдет обязательно. Такое событие называется *достоверным* и обозначается буквой U. Его вероятность по формуле (*) равна 1: $P(U) = 1$. С другой стороны, по теореме сложения вероятностей $P(C) + P(\overline{C}) = P(U)$. Поэтому

$$P(C) + P(\overline{C}) = 1.$$

Вид вероятности события E (см. выше) также позволяет сделать некоторые выводы. Событие E состоит в том, что на красной кости выпало четное число очков (событие A), а на синей — кратное трем (событие B). Вероятность события A равна 3/6 (из 6 исходов при бросании красной кости событию A благоприятствуют 3), события B — 2/6 (аналогично). Итак, $P(A) = 1/2$, $P(B) = 1/3$, $P(E) = 1/6$. Здесь событие E — не сумма, а скорее «произведение событий» A и B. Мы видим, что в данном случае справедлива формула

$$P(A \text{ и } B) = P(A) \cdot P(B),$$

выражающая *теорему умножения вероятностей*. Эта формула справедлива и в общем случае, ведь если в одном опыте n_1 исходов, из которых m_1 благоприятствует событию A, а в другом n_2 исходов, из которых m_2 благоприятствует событию B, то эти опыты, проводимые один за другим, допускают $n_1 n_2$ исходов (все возможные комбинации), из которых $m_1 m_2$ благоприятствуют событию $E = (A$ и $B)$. Но

$$\frac{m_1 m_2}{n_1 n_2} = \frac{m_1}{n_1} \cdot \frac{m_2}{n_2},$$

то есть

$$P(A \text{ и } B) = P(A) \cdot P(B).$$

Подчеркнем, что эти опыты **не зависят** друг от друга, выпадение четного числа очков на красной кости не влияет на число очков, которое появится на синей кости, то есть появление события A никак не влияет на появление события B. Подобные события называются *независимыми*.

У нас независимые события появились в разных опытах, но и при одном опыте два события могут оказаться независимыми. Скажем, появление события A «выпадение на кости числа очков, кратного 2» (то есть 2, 4, 6) не влияет на появление события B «выпадение на той же кости числа очков, кратного 3» (3, 6). Это кажется странным, ведь опыт-то один, но все дело в том, что исходы, благоприятствующие событию B, распределены равномерно среди событий, благоприятствующих A, и не благоприятствующих A.

Если событие A появилось, то есть выпали 2, 4 или 6 очков, то в двух из этих исходов событие B не появилось (2, 4), а в одном — появилось (6). Если же событие A не появилось, то есть выпали 1, 3 или 5 очков, то по-прежнему в двух из этих исходов B не появилось (1, 5), а в одном появилось (3). Так, что, независимо от появления события A, событие B (в том же опыте) появится в 1 случае из 3.

Оказывается, теорему умножения вероятностей можно сформулировать так. *Если A и B — независимые события, то вероятность события «A и B» равна произведению вероятностей событий A и B.*

Задачи

1. Проводится некоторый опыт O с множеством исходов $И$. Можно ли считать эти исходы равновероятными, если:

а) O — «бросание монетки», $И = \{$сверху герб, сверху цифра$\}$;

б) O — «один шахматист держит в кулаках черную и белую пешки, а второй указывает на правый или левый кулак», $И = \{$в выбранной руке белая пешка, в выбранной руке черная пешка$\}$;

в) O — «из календаря вырывается (наугад) один листок», $И = \{$на оторванном листе праздничный день, на оторванном листе будничный день$\}$;

г) O — «финальный забег на 100 *м* шести участников с номерами от 1 до 6»; $И = \{$победил № 1, победил № 2,..., победил № 6$\}$;

д) O — «из 28 костей домино, лежащих на столе (очками вниз) и хорошо перемешанных, выбирается одна», $И$={выбран дубль, выбран не дубль};

е) O — «из урны, в которой лежат 3 белых и 3 черных шара (одинаковых на ощупь), в темноте извлекается один», $И$={извлечен белый шар, извлечен черный шар}.

2. В урне лежат 6 белых и 8 черных шаров. Из урны наугад извлекается один шар. Какова вероятность, что этот шар — белый?

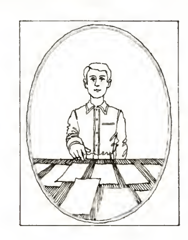
3. Монета бросается три раза. Какова вероятность, что все три раза сверху окажется цифра?

4. Наугад выбирается одна кость домино. Какова вероятность, что сумма очков на ней делится на четыре?

5. Картонку с написанным на ней словом «математика» разрезали на одинаковые квадратики с одной буквой на каждом, перемешали и вытащили один квадратик. Какова вероятность, что на нем буква «т»? Какая буква вероятнее всего на нем будет?

6. Из 27 билетов ученик Петя мог ответить лишь на те, номера которых были кратны 5. Когда десятым по счету он вошел в класс, оказалось, что билет № 1 и все билеты с 20-го по 27-й уже взяты.

Какова вероятность, что Петя вытащит билет, на который он может ответить? Какова была бы эта вероятность, если бы Петя вошел в класс первым? Какая из этих вероятностей больше?



Число «пи» и теория вероятностей

Хотите экспериментально найти число π? Попробуйте! Для этого нужна лишь коробка спичек и лист бумаги.

На листе бумаги проведите сетку параллельных прямых на расстоянии друг от друга, равном длине спички. Теперь случайным образом бросайте на лист бумаги спички (как на первой странице обложки этого номера журнала) и считайте число спичек, пересекающих линии сетки (можно и много раз бросать одну спичку). Разделив удвоенное общее число спичек на полученное число, вы и найдете число π (чем больше спичек вы бросите, тем точнее найдете число π).

Доказать это можно с помощью теории вероятностей. Если спичка длины l упала под углом φ к линиям сетки, то ее «эффективная длина» равна $\sin\varphi$. Пусть некоторая спичка пересекла линию сетки, тогда ее нижний конец находится на расстоянии не больше $\sin\varphi$ от проходящей над ним линии сетки (см. рисунок). Вообще же это расстояние заключено в пределах от 0 до 1. По правилам теории вероятностей эта спичка пересекает линию сетки с вероятностью $\sin\varphi$.

Теперь, чтобы найти вероятность того, что случайным образом упавшая спичка пересечет линию сетки, надо усреднить полученную вероятность $\sin\varphi$ по всем φ $(0\leqslant\varphi\leqslant\pi/2)$, поскольку все значения углов φ равновероятны, то есть найти значение выражения

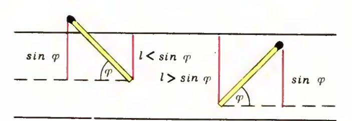
$$\int_0^{\pi/2}\sin\varphi\, d\varphi$$

и разделить его на $\pi/2$.

Десятиклассники быстро найдут, что интеграл равен 1, то есть как раз $\frac{2}{\pi}$ часть спичек должна пересечь линии сетки.

Впервые такой эксперимент произвел с иглой (бросая ее много раз) французский естествоиспытатель Ж. Л. Л. Бюффон (1707—1788), в его честь этот опыт назван «иглой Бюффона». В конце XIX века многие математики бросали иглу по 3—5 тысяч раз и получали для π значение порядка 3,15. Интересно, какое значение π даст вам один коробок спичек?

А. Виленкин



Спрашивайте — отвечаем

Читатель Ю. Брегман из Риги прислал в редакцию такое письмо:

«Уважаемая редакция! Хотел бы вам сообщить идею, касающуюся проблемы управляемого термоядерного синтеза. Она имеет много общего с «лазерным термоядом». Пусть имеется некоторое количество ядерного горючего. В него «выстреливают» несколько античастиц (например, позитронов или антипротонов). Происходит аннигиляция. Выделившаяся энергия в виде двух фотонов способствует подогреву дейтерия, в результате чего происходит термоядерная реакция. Эта реакция цепная, поэтому для ее самоподдержания дальнейшего притока энергии извне не требуется. Источником позитронов может быть радиоактивное вещество (например $_{15}P^{20}$ или $_{7}N^{13}$)».

Отвечает на это письмо консультант отдела физики нашего журнала А. Володин.

Инициировать термоядерную реакцию аннигиляцией вещества и антивещества в принципе можно.

Термоядерная реакция с заметным выходом энергии начнется, если смесь легких изотопов водорода нагреть до очень высокой температуры — порядка десятков миллионов или сотен миллионов градусов.

Однако одного инициирования термоядерной реакции мало. Для решения проблемы термоядерного синтеза необходимо длительное протекание процесса. Поскольку (в отличие от ядерной реакции деления) реакция термоядерного синтеза не носит цепного характера (в этом Ваша ошибка!), для осуществления управляемой термоядерной реакции, помимо ядерного горючего, необходимо в зону реакции непрерывно или периодически подводить энергию извне. Естественно, эта энергия должна составлять лишь некоторую часть всей энергии, выделяющейся в реакции.

Существенной для управляемого термоядерного процесса является не только величина подводимой энергии, но и скорость ее эффективного подвода. Важной характеристикой процесса служит энергетическое время жизни τ — среднее время пребывания в зоне реакции частиц плазмы, в которую превращается ядерное горючее. Каждую порцию энергии, требующуюся для поддержания реакции, необходимо подводить за время, не превышающее τ. В реакции дейтерия с тритием τ получается порядка наносекунды (10^{-9} *сек*). За время τ частицы горючей плазмы разлетятся на расстояния порядка миллиметра. Это определяет объем зоны реакции — несколько кубических миллиметров.

Таким образом, управляемая термоядерная реакция пойдет, если в каждом ее единичном цикле крупинку твердого дейтерия или трития объемом несколько кубических миллиметров нагреть за наносекунду до температуры в сотни миллионов градусов. Реальными источниками подводимой мощности могут быть лазерный луч или электронный пучок предельной интенсивности.

Использование же аннигиляции в качестве источника мощности потребует достаточно больших количеств антивещества (порядка микрограмма в каждом цикле) или очень интенсивных источников античастиц, в настоящее время совершенно недоступных. Кроме того, для практического использования предложенного Вами метода необходим достаточно экономичный способ воспроизводства антивещества, о котором трудно сделать даже самые фантастические предположения.



Е. Галкин

Рационально или иррационально?

Основной вопрос, который рассматривается здесь, — как узнать, рационально или иррационально данное действительное число. Эта проблема не имеет существенного значения для практики, поскольку в прикладных задачах всегда можно действительное число заменить его десятичным приближением с определенной точностью, однако она важна с теоретической точки зрения — решение подобных задач способствует более глубокому пониманию сущности рациональных и иррациональных чисел, и в практике вступительных экзаменов такие задачи встречаются довольно часто.

Начнем с простейшего вопроса.

Пример 1. *Доказать, что сумма двух чисел, одно из которых рационально, а другое иррационально, есть число иррациональное.*

Пусть число a рационально, число b иррационально: $a \in \mathbf{Q}$, $b \in \mathbf{I}$, где $\mathbf{Q}$ и $\mathbf{I}$ — множества соответственно рациональных и иррациональных чисел. Предположим, что сумма $a+b$ рациональна: $a+b=c\in\mathbf{Q}$. Тогда число $b=c-a$ рационально, как разность двух рациональных чисел, а это противоречит условию.

Аналогичное утверждение верно для разности, произведения и частного рационального и иррационального чисел.

Есть лишь одно исключение: *для любого иррационального числа а числа*

$$0\cdot a=0\in\mathbf{Q} \quad и \quad \frac{0}{a}=0\in\mathbf{Q}.$$

Это утверждение используется чаще, чем, возможно, кажется на первый взгляд. Так, корни уравнения $x^2-6x+7=0$, выражающиеся формулой $x_{1,2}=3\pm\sqrt{2}$, иррациональны. Этот факт основан не на внешнем виде корней, а на доказанном нами свойстве, что сумма и разность рационального и иррационального чисел являются числами иррациональными.

Множество, в котором выполнимы операции сложения, вычитания, умножения и деления (кроме деления на нуль), называется *полем*. Так, множество $\mathbf{Q}$ рациональных чисел — поле. Напротив, множество иррациональных чисел $\mathbf{I}$, как показывает решение следующего примера, полем не является.

Пример 2. *Может ли сумма двух положительных иррациональных чисел быть числом рациональным?*

Условие положительности необходимо, чтобы исключить такой тривиальный случай, как, например, $\sqrt{2}+(-\sqrt{2})=0$. Немного подумав, из этого тривиального примера можно получить нетривиальный: $\sqrt{2}+(2-\sqrt{2})=2$. Если же мы вернемся к квадратному уравнению $x^2-6x+7=0$, имеющему иррациональные корни $x_1=3+\sqrt{2}$ и $x_2=3-\sqrt{2}$, то увидим, что по теореме Виета $x_1+x_2=6$, $x_1x_2=7$. Следовательно, не только сумма, но и произведение двух иррациональных чисел может быть числом рациональным.

Пример 3. *Доказать, что если $\sqrt[n]{a}$, где a и n — любые натуральные числа, $n>1$, не равен никакому натуральному числу, то $\sqrt[n]{a}$ — число иррациональное.*

Предположим, что $\sqrt[n]{a}$ является числом рациональным. Тогда по условию этот корень может быть только дробным числом: $\sqrt[n]{a}=\frac{p}{q}$, где p и q — некоторые натуральные числа, $q\neq1$, $\frac{p}{q}$ — несократимая дробь, и $\frac{p^n}{q^n}=a$.

Обозначим через k какой-нибудь простой делитель числа q. Будем считать известным следующее предложение: *если произведение натуральных чисел делится на простое число, то по меньшей мере один из множителей делится на это число.* В данном

случае $p^n = p \cdot p \cdot \ldots \cdot p$ делится на q, а потому и на k, стало быть, p делится на k. Получилось, что числа p и q оба делятся на k, а это противоречит тому, что $\frac{p}{q}$ —несократимая дробь.

В учебнике «Алгебра-7» доказывается, что *не существует рационального числа, квадрат которого равен* 2, другими словами, что $\sqrt{2}$—число иррациональное. С помощью утверждения последней задачи можно доказать иррациональность большого класса действительных чисел. Докажем, например, иррациональность $\sqrt{3}$.

Имеем: $1<\sqrt{3}<2$ (так как $1<3<4$). Следовательно, $\sqrt{3}$ не равен никакому натуральному числу, а потому он является числом иррациональным.

Аналогично доказывается иррациональность чисел $\sqrt{5}, \sqrt{6}, \sqrt{7}, \sqrt[3]{2}, \sqrt[5]{3}, \sqrt[6]{5}$ и т. п.

Пример 4. *Доказать, что число* $\sqrt{3}+\sqrt{5}$ *иррационально.*

Допустим противное — пусть это число рационально: $\sqrt{3}+\sqrt{5}=r \in \mathbf{Q}$. Возведем равенство $\sqrt{5}=r-\sqrt{3}$ в квадрат, получим $5=r^2+3-2r\sqrt{3}$. Отсюда $\sqrt{3}=\frac{r^2-2}{2r} \in \mathbf{Q}$. Мы пришли к противоречию.

Аналогично доказывается иррациональность $\sqrt{a}+\sqrt{b}$, если $a \in \mathbf{Q}$, $a>0$, $\sqrt{a} \notin \mathbf{Q}$, $b \in \mathbf{Q}$, $b>0$, $\sqrt{b} \notin \mathbf{Q}$.

Пример 5. *Доказать, что для любого натурального числа n, не являющегося степенью 10 с целым показателем, $\lg n$ есть число иррациональное.*

Предположим противное: $\lg n = r \in \mathbf{Q}$. Тогда число r может быть только дробным, так как иначе $n=10^r$. Пусть $\lg n = \frac{p}{q}$, где p и q — некоторые натуральные числа, $\frac{p}{q}$ — несократимая дробь. Отсюда $10^{\frac{p}{q}}=n$, $10^p=n^q$.

В последнем равенстве разложение левой части на простые множители содержит двойки и пятерки в одинаковых степенях, равных p, а разложение правой части либо вообще их не содержит (если n не делится ни на 2, ни на 5), либо — в разных, поскольку n не является степенью 10. Следовательно, это равенство невозможно.

Из утверждения последней задачи вытекает, что десятичные логарифмы чисел 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 11 и т. д. иррациональны.

Пример 6. *Доказать, что* $\cos\frac{\pi}{2^n}$ *при любом натуральном* $n \geqslant 2$ *есть число иррациональное.*

Допустим, что $\cos\frac{\pi}{2^n}$ является числом рациональным. Полагая в формуле косинуса двойного угла

$$\cos 2\alpha = \cos^2\alpha - \sin^2\alpha = 2\cos^2\alpha - 1$$

$\alpha = \frac{\pi}{2^n}$, получим, что

$$\cos\frac{\pi}{2^{n-1}} = 2\cos^2\frac{\pi}{2^n} - 1$$

— число рациональное. Аналогично $\cos\frac{\pi}{2^{n-2}}$ есть число рациональное и так далее. Продолжая этот процесс, мы получим, что $\cos\frac{\pi}{4}$ — число рациональное. Однако это не так: $\cos\frac{\pi}{4} = \frac{\sqrt{2}}{2} \notin \mathbf{Q}$.

Пример 7. *Доказать, что* $\cos 1°$ *является числом иррациональным.*

Предположим, что $\cos 1°$ рационален. Тогда и $\cos 2°$ — число рациональное. Далее, $\cos 3° = \cos 1° \times (4\cos^2 1° - 3)$, откуда следует, что $\cos 3°$ — также число рациональное.

Далее с помощью легко проверяемого тождества

$$\cos(k+1)° = 2\cos k° \cos 1° - \cos(k-1)°$$

доказывается, что рациональны косинусы углов 4°, 5°, 6°, ..., 30°. Мы пришли к противоречию, так как $\cos 30° = \frac{\sqrt{3}}{2} \notin \mathbf{Q}$.

Пример 8. *Рационально или иррационально действительное число, представляющееся бесконечной десятичной дробью*

$$\alpha = 0{,}12345678910111213\ldots$$

(после запятой выписываются все последовательные натуральные числа)?

Допустим, что десятичная дробь α представляет рациональное число. Тогда с некоторого места она должна стать периодической. Обозначим количество цифр в периоде через n. А теперь заметим, что в записи этой дроби сколь угодно далеко можно найти подряд n нулей — это участки, соответствующие числам $k \cdot 10^n$ (последние их n цифр).

Отсюда следует, что период состоит из одних нулей. Однако это невозможно, так как в записи дроби α как угодно далеко от запятой встречаются и цифры, отличные от нуля.

Пример 9. *Доказать, что между любыми двумя различными действительными числами содержится рациональное число.*

Пусть $\alpha > \beta$ — данные числа*) и

$$\alpha = \alpha_0, \alpha_1 \alpha_2 \ldots \alpha_n \ldots,$$
$$\beta = \beta_0, \beta_1 \beta_2 \ldots \beta_n \ldots$$

— их представления в виде бесконечной десятичной дроби, не содержащие бесконечной последовательности девяток. Тогда найдется такое натуральное число k, что $\alpha_0 = \beta_0$, $\alpha_1 = \beta_1$, ..., $\alpha_{k-1} = \beta_{k-1}$, но $\alpha_k > \beta_k$ (возможно, $k = 0$). Найдем такое натуральное m, что $\beta_{k+m} < 9$, оно существует, поскольку бесконечные десятичные дроби с периодом 9 исключаются из рассмотрения. Число

$$\gamma = \beta_0, \beta_1\beta_2 \ldots \beta_k \ldots \beta_{k+m-1}\ 90\,000\ldots$$

рационально и удовлетворяет неравенству $\beta < \gamma < \alpha$, так как $\beta_{k+m} < 9$ и $\beta_k < \alpha_k$.

Пример 10. *Доказать, что между действительными числами* $\alpha = 3{,}625487$ *и* $\beta = 3{,}625491$ *содержится иррациональное число.*

Первые цифры искомого числа γ подберем так, чтобы было $\alpha < \gamma < \beta$. Для этого достаточно его десятичную запись начать следующим образом: $\gamma = 3{,}625488\ldots$

Теперь позаботимся об иррациональности числа γ. Этого можно добиться, например, способом, приведенным в примере 8:

$$\gamma = 3{,}6254881234567891011\ldots$$

*) Можно считать, что $0 < \alpha < 10$, $0 \leq \beta < 10$.

Упражнения

1. Зная, что число π иррационально, доказать, что число $\frac{\pi}{2} + k\pi$ при любом целом k также иррационально.

2. Доказать, что любое рациональное число, не равное нулю, является периодом функции Дирихле D:

$$D(x) = \begin{cases} 1, & \text{если } x \text{ рационально,} \\ 0, & \text{если } x \text{ иррационально.} \end{cases}$$

Является ли какое-нибудь иррациональное число периодом этой функции?

3. Доказать, что для любого натурального $n > 1$ корень n-й степени из любого положительного иррационального числа — число иррациональное.

4. Могут ли быть иррациональными числа a и b, если рациональны числа:

а) $a+b$ и $a-b$;
б) $a-b$ и ab;
в) $a+b \neq 0$ и a/b;
г) ab и a/b;
д) $a+b \neq 0$, a^2 и b^2?

5. Числа $\frac{a+1}{a^2+2}$ и $\frac{a^2+3}{a^2+4}$ рациональны. Рационально или иррационально число a?

6. Доказать иррациональность следующих чисел:

а) $\sqrt{3} + \sqrt{5} + \sqrt{7}$;
б) $\sqrt{2} + \sqrt[3]{3}$;
в) $\sqrt[3]{2} + \sqrt[3]{3}$.

7. Рациональны или иррациональны числа:

а) $\sqrt{1 + \sqrt{2 + \sqrt{3}}}$;
б) $\sqrt{6 + \sqrt{11}} - \sqrt{6 - \sqrt{11}}$;
в) $\sqrt[3]{20 + 14\sqrt{2}} + \sqrt[3]{20 - 14\sqrt{2}}$?

8. Существуют ли положительные рациональные числа a и b такие, что:

а) $\sqrt{a} + \sqrt{b} = \sqrt{2}$;
б) $\sqrt{a} + \sqrt{b} = \sqrt[4]{2}$?

9. Доказать, что десятичный логарифм любого положительного рационального числа, не являющегося степенью 10 с целым показателем,— число иррациональное.

10. Рационально или иррационально число $\operatorname{tg} 1°$?

11. Доказать, что $\cos n°$, где n — некоторое натуральное число, меньшее 90 и не равное 60, — число иррациональное.

12. Доказать, что действительное число α, представляющееся бесконечной десятичной дробью 0,12122122212221... (количество двоек последовательно возрастает на 1), иррационально.

13. Доказать, что между любыми двумя различными действительными числами содержится иррациональное число.

Московский физико-технический институт

Московский физико-технический институт готовит инженеров-физиков-исследователей по новейшим областям физики и техники.

Особенность системы обучения, принятой в физико-техническом институте, состоит в том, что здесь фундаментальное высшее образование сочетается со специальной подготовкой в так называемых базовых научно-исследовательских институтах и конструкторских бюро, где созданы специальные кафедры института.

На первых курсах студенты получают общенаучную подготовку.

Математика, общая и теоретическая физика, общественные науки изучаются в объеме университетских курсов, чтобы будущие специалисты хорошо владели знаниями, составляющими основу образования физика-исследователя. Быстрому ознакомлению с возрастающим потоком научно-технической информации способствует углубленное изучение иностранных языков.

Специализация и самостоятельная исследовательская работа в базовом институте начинается уже со второго — третьего курсов.

В базовом институте студент слушает лекции по специальности, участвует в работе научных семинаров, вовлекается в исследовательскую работу лабораторий института. Будущий специалист имеет дело с новейшими приборами, участвует в решении не модельных, специально для его практики придуманных задач, а актуальных проблем, стоящих перед лабораторией. Дипломная работа каждого студента МФТИ входит, как правило, в тематический план базового института. В творческой обстановке научного коллектива студент проходит неоценимую школу воспитания. Работа под непосредственным руководством крупного ученого во многом предопределяет успех его будущей самостоятельной деятельности.

Среди базовых институтов МФТИ — ведущие научные центры Москвы (см. «Квант», 1972, № 6, 1975, № 5).

Институт готовит специалистов на восьми факультетах: факультет радиотехники и кибернетики, факультет общей и прикладной физики, факультет аэрофизики и космических исследований, факультет молекулярной и химической физики, факультет физической и квантовой электроники, факультет аэромеханики и летательной техники, факультет управления и прикладной математики, факультет проблем физики и энергетики.

На каждом из факультетов подготовка ведется по широкому кругу специальностей, охватывающему большинство областей современной физики, техники и кибернетики.

Ниже мы публикуем варианты вступительных экзаменов по математике и физике в МФТИ 1976 года.

Математика

Билет 1

1. Решить уравнение

$$\sqrt{2x+8}=\sqrt{2x-4}+2\sqrt{3x-3}.$$

2. Решить неравенство

$$\log_2(x^2-4x+4)+2x>2-(x+1)\log_{1/2}(2-x).$$

3. Две окружности касаются внутренним образом. Прямая, проходящая через центр меньшей окружности, пересекает бóльшую в точках A и D, а мéньшую — в точках B и C. Найти отношение радиусов окружностей если $|AB|:|BC|:|CD|=2:4:3$.

4. Решить систему уравнений

$$\begin{cases} 3\operatorname{tg}\dfrac{y}{2}+6\sin x=2\sin(y-x), \\ \operatorname{tg}\dfrac{y}{2}-2\sin x=6\sin(y+x). \end{cases}$$

5. Объем правильной четырехугольной пирамиды $SABCD$ равен V. Высота SP пирамиды является ребром правильного тетраэдра $SPQR$, плоскость грани PQR которого перпендикулярна ребру SC. Найти объем общей части этих пирамид

Билет 2

1. Второй, первый и третий члены арифметической прогрессии, разность которой отлична от нуля, образуют в указанном порядке геометрическую прогрессию. Найти ее знаменатель.

2. Решить систему уравнений

$$\begin{cases} \lg^2 x=\lg^2 y+\lg^2(xy), \\ \lg^2(x-y)+\lg x\,\lg y=0 \end{cases}$$

3. Решить уравнение

$$\cos 3x-\cos 2x=\sin 3x.$$

4. В трапеции $ABCD$ ($|AD|\parallel|BC|$) величина угла BAD равна α, $|AB|=2|BC|+|AD|$, K — точка боковой стороны CD такая, что $|CK|:|KD|=1:2$. Найти величины углов треугольника ABK

5. Длина стороны основания правильной треугольной призмы $ABCA_1B_1C_1$ равна 3 *см*, высоты — $4\sqrt{3}$ *см*. Вершина правильного тетраэдра лежит на отрезке, соединяющем центры граней ABC и $A_1B_1C_1$. Плоскость

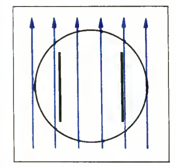


Рис. 1.

Рис. 2.

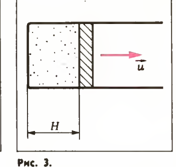


Рис. 3.

основания этого тетраэдра совпадает с плоскостью основания ABC призмы, а плоскость одной из боковых граней тетраэдра проходит через диагональ AB_1 боковой грани призмы. Найти длину ребра тетраэдра.

Физика

Билет 1

1. Человек скатывается на санях под уклон, составляющий угол $\alpha = 6°$ с горизонтом. Масса саней M в два раза больше массы человека m. Коэффициент трения саней о поверхность склона $\mu = 0{,}2$. Как должен двигаться человек относительно саней, чтобы сани двигались под уклон равномерно?

2. В цилиндре под легким поршнем находится 14 *г* азота при 27°С. Какое количество теплоты необходимо ему сообщить при изотермическом увеличении объема на 4%? Относительная молекулярная масса азота равна 28.

Указание. При небольших изменениях объема $\left(\frac{\Delta V}{V} \ll 1\right)$ воспользоваться приближенной формулой $\left(1 + \frac{\Delta V}{V}\right)^{-1} \approx$ $\approx 1 - \frac{\Delta V}{V}$.

3. Поток проводящей жидкости (расплавленный металл) течет по керамической трубе. Для измерения скорости жидкости трубу помещают в однородное магнитное поле, перпендикулярное оси трубы, а в трубе закрепляют два электрода, образующие плоский конденсатор (рис. 1). Измеряется разность потенциалов между электродами. Определить скорость потока, если магнитная индукция поля $|\vec{B}| = 0{,}01$ *тл*, расстояние между электродами $d = 2$ *см*, измеренная разность потенциалов $U = 0{,}4$ *мв*.

4. В равнобедренной прямоугольной стеклянной призме основание AB и боковая грань BC гладкие, а грань AC — матовая (рис. 2). Призма стоит на газете. Наблюдатель, смотрящий через грань BC, видит часть текста, находящегося под основанием AB, равную $\alpha = 0{,}895$ (по площади). Каков показатель преломления стекла?

Билет 2

1. α-частица, имеющая скорость 1000 *м/сек*, налетает на атом углерода, который двигался до соударения в том же направлении, но со скоростью, вдвое меньшей. С какой скоростью перемещается центр масс соударяющихся атомов?

2. В цилиндрическом сосуде, закрытом поршнем, находится разреженный газ, все молекулы которого имеют равные по абсолютной величине скорости $|\vec{v}| = 200$ *м/сек*. Первоначально поршень отстоит от дна сосуда на расстоянии $H = 50$ *см* (рис. 3). Затем его быстро, со скоростью $|\vec{u}| = 25$ *м/сек*, смещают направо на расстояние 3/5 H. Определить, в каком интервале будут находиться скорости молекул газа. Столкновения молекул со стенками и поршнем считать абсолютно упругими.

3. Плоский воздушный конденсатор с расстоянием между пластинами $d = 2$ *см* подключен к источнику с э. д. с. $\mathscr{E} = 1000$ *в* (рис. 4). В середине конденсатора параллельно его пластинам и на равном

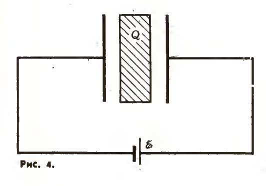


Рис. 4.

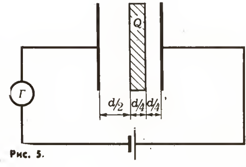


Рис. 5.

расстоянии от них расположена металлическая заряженная плита толщиной $d_1 = 1$ *см*. Заряд на плите $Q = 10^{-9}$ *к*. Предполагая, что пластины конденсатора жестко скреплены, определить суммарную электростатическую силу, действующую на конденсатор.

4. С помощью системы из двух тонких положительных линз рассматривают стену, находящуюся на расстоянии $a = 100$ *м* от передней линзы. Задний фокус первой линзы и передний фокус второй линзы совпадают. Расстояние между линзами $L = 30$ *см*. Линейное увеличение системы $\beta = 1/2$. В фокальной плоскости первой линзы установлена диафрагма диаметром $d = 4$ *мм*. Каковы размеры области на стене, видимой через эту систему?

Билет 3

1. При слиянии дейтона с ядром Li^6 происходит ядерная реакция $Li^6 + d \rightarrow n + Be^7$, в которой выделяется энергия $Q = 3{,}37$ *Мэв*. Считая кинетическую энергию исходных частиц пренебрежимо малой, найти распределение энергии между продуктами реакции.

2. В герметичном сосуде объемом $V = 5{,}6$ *л* содержится воздух при давлении $p = 760$ *мм рт. ст.* Какое давление установится в сосуде, если воздуху сообщить $Q = 1430$ *дж* тепла? Молярную теплоемкость воздуха при постоянном объеме принять равной $C_V = 21$ *дж/(моль·град)*.

3. Плоский воздушный конденсатор подключен через гальванометр к источнику с постоянной э. д. с. При этом заряд на конденсаторе $q = 10^{-9}$ *к*. Параллельно пластинам вводится металлическая заряженная плита, заряд которой $Q = 4 \cdot 10^{-9}$ *к*. Геометрические размеры указаны на рисунке 5. Какой заряд протечет через гальванометр?

4. Атом вещества с относительной атомной массой A, жестко закрепленный в кристаллической решетке, поглощает свет частоты ν_0. При какой частоте будет максимум поглощения в этом веществе, находящемся в газообразном состоянии? Масса протона равна m_p.

Ю. Никольский,
Б. Федосов,
В. Чехлов,
А. Шелагин

Факультет управления и прикладной математики МФТИ

Факультет управления и прикладной математики (ФУПМ) — самый молодой факультет Московского физико-технического института. В 1976 году МФТИ справил свое тридцатилетие, а ФУПМу исполнилось всего 7 лет. В то же время это самый первый и самый «старый» среди аналогичных факультетов в вузах страны. На факультете работают академики Б. В. Бункин, В. М. Глушков, А. А. Дородницын, Н. Н. Иноземцев, А. А. Самарский, В. А. Трапезников; члены-корреспонденты АН СССР О. М. Белоцерковский, Н. Н. Моисеев, Г. С. Поспелов.

Чем же вызвано создание этого факультета? Что отличает его от «традиционных» физтеховских факультетов?

Чтобы ответить на эти вопросы, надо сначала рассказать об основных направлениях факультета. Как видно из его названия, мы имеем два профиля подготовки студентов: прикладная (вычислительная) математика и математическая физика и управление.

Помните, как ответил фонвизинский Митрофанушка на вопрос, является «дверь» именем прилагательным или существительным? Ответ был следующим: «Прилагательна. Потому что она приложена к своему месту. Вон у чулана дверь не повешена, так она существительна».

К сожалению, подобное представление о прикладной математике свойственно многим выпускникам школ (да и не только им): математика «сама по себе»—«существительна», а если ее приложить к чему-либо, то это и будет «прикладная математика». Между тем на самом деле прикладная математика — это не просто приложение математики, это самостоятельная математическая дисциплина со своей внутренней логикой, со своим стилем и мышлением. Часто забывают о том, что самые крупные математики — Л. Эйлер, А. Пуанкаре, К. Ф. Гаусс, П. Л. Чебышев, Софья Ковалевская были «прикладниками».

Эйлеру принадлежат, например, работы по баллистике и устойчивости стержней, Пуанкаре занимался физикой и астрономией. Сетка, применяемая в топографических картах, долгое время носила имя Гаусса. Чебышев создал теорию механизмов. Софье Ковалевской всемирную известность принесла премия за работу по теории гироскопов, а академик А. Н. Крылов уделял особое внимание методам вычислений. Причем вычислительная математика всегда вносила существенный вклад в развитие «чистой» математики и других естественных наук. Так, расчеты, проведенные Пуанкаре в астрономических исследованиях, привели к созданию теории расходящихся рядов. Прекрасным примером, иллюстрирующим роль вычислительной математики в естественных науках, является открытие новой планеты, сделанное Леверье после весьма точного вычисления орбит других небесных тел. Так что вычислительная математика вносила солидный вклад в развитие наук еще в те времена, когда вычисления производились карандашом на бумаге, а идея создания арифмометра лишь «витала в воздухе».

Однако тогда влияние вычислительной математики на развитие наук в целом было

весьма ограничено — трудоемкость вычислительных методов не позволяла «рядовому» ученому широко ими пользоваться, обычно производились только вычисления, необходимые для обработки экспериментальных наблюдений. К тому же в начале двадцатого века резкое удешевление эксперимента привело к некоторому забвению вычислительных методов как аппарата исследования.

Положение коренным образом изменилось в середине двадцатого века с появлением электронно-вычислительной техники. Стали возможными крупные «машинные эксперименты», позволяющие заменить дорогой и нередко опасный эксперимент исследованием математической «модели».

Широкое применение таких машинных экспериментов привело к появлению новых специальностей, например вычислительной физики, представители которой занимают как бы промежуточное положение между физиками-теоретиками и физиками-экспериментаторами. Они проводят теоретические изыскания и «эксперименты» с помощью ЭВМ.

Еще сложнее охарактеризовать второе направление нашего факультета — «управление».

Если проанализировать литературные произведения, то можно заметить хронологическую смену героев: в романах XVII века это рыцарь, XVIII — торговец (вспомните Робинзона Крузо), XIX — промышленник и финансист (например, романы Голсуорси, Мамина-Сибиряка и др.), в романах XX столетия появляется «управленец», организатор. Это отражает определенные сдвиги в занятиях людей.

В широком смысле «управление» — это один из видов человеческой деятельности. Сложные современные объекты, будь то самолет или завод, требуют надлежащего управления. Поэтому число людей, занимающихся (прямо или косвенно) управлением, непрерывно возрастает. Например, одним лишь планированием в любой развитой стране занимается несколько десятков тысяч человек.

В более узком смысле «управление» — это прикладная наука, исследующая управленческую деятельность. Сюда относится автоматизация производства и создание роботов, например «луноходов» и более простых для замены человека в особо тяжелых условиях, создание станков с программным управлением и т. п. Но внедрение вычислительной техники и автоматики происходит не только на производстве.

При создании гигантского ускорителя элементарных частиц в Серпухове столкнулись со следующей проблемой. Подготовка ускорителя для проведения опытов занимает месяцы. Потом около месяца ускоритель находится в «рабочем состоянии». Отдельный эксперимент занимает доли секунды, а обработка его результатов — недели. Так как условия следующего эксперимента определяются результатами предыдущего, удается в течение этого месяца провести всего несколько экспериментов. Таким образом, основную часть времени ускоритель простаивает, «ожидая» пока будут обработаны результаты эксперимента. Проблему решила ЭВМ, которая взяла обработку экспериментов на себя и проводит их в пределах одного-двух часов. Физики, работающие на ускорителе, хотят добиться того, чтобы ЭВМ давала условия проведения следующей серии опытов непосредственно ускорителю.

Еще пример. Проектирование современного самолета занимает долгие годы, а в конце концов может оказаться, что самолет, на создание которого ушли миллионы рублей, уже «морально устарел» — появились новые требования, лучшие материалы и т. п. Для ускорения проектирования нужно создать систему автоматизации проектирования, когда конструктор работает в контакте с ЭВМ, «подсказывающей» ему решение, проводящей нужные расчеты, выдающей требуемую числовую или графическую информацию.

Подобные примеры можно привести не только в технике, но и в экономике, и даже в международных отношениях и в решении проблем охраны окружающей среды. Все эти примеры отражают один из наиболее характерных процессов нынешней научно-технической революции — процесс замены простейших форм умственного труда трудом «умных» машин. Эта замена вызвала к жизни ряд новых прикладных научных направлений.

Наконец, есть еще один, самый узкий смысл слова «управление».

Промышленная революция, происходившая в XIX веке, привела к замене физического труда трудом машин и механизмов, и именно в те годы расцвела физика, которая была научной базой этой революции, а потому — ведущей наукой XIX века. Правда, слава, которая всегда приходит с запозданием, пришла к физике только в начале XX века.

Научно-техническая революция, происходящая в настоящее время, приводит к замене умственных усилий работой вычислительных машин. Возникающие при этом прикладные науки нуждаются в своем теоретическом фундаменте, подобном физике для инженерных наук прошлого века. Таким фундаментом и является управление, понимаемое как точная наука подобно математике и физике.

Можно сказать, что математика изучает отношения «a больше b», «c принадлежит D», физика изучает свойства (изменения) отношений под действием некоторых сил, полей. Управление изучает целенаправленное изменение отношений, преследующее достижение некоторых целей. Поэтому физические модели являются частным случаем моделей управления. Вы знаете, что, например, падение тела можно объяснить и описать, «приписав» природе цель — минимизировать потенциальную энергию тела.

Управление — физическая наука в том смысле, что она, как и физика, изучает реальные объекты; в то же время это точная математическая наука. Понятие «управление» (общеизвестен перевод на греческий «кибернетика») шире, чем понятие «теоретическая кибернетика», и включает последнее в себя. Дело в том, что определение кибернетики, в основу которого положены понятия инфор-

мации и обратной связи, применимо в основном к техническим системам. Для бихевиоральных систем (систем, обладающих поведением) основной проблемой является проблема выбора решения. Сейчас общепризнано, что без математического описания таких систем невозможен прогресс ни в биологии, ни в экономике. Управление в настоящее время более «физическая» наука, чем физика. Галилей так определил задачу физики: «Измерить то, что измеримо, сделать измеримым то, что нельзя измерить». Современная физика уже определилась и занимается первой половиной этой задачи. В новой науке — теории управления — одинаково важны обе стороны проблемы.

В то же время основные понятия этой науки быстро математизируются, а за последние десять лет возникли настолько математизированные разделы управления, что их зачастую относят к области чистой математики: теоретическая кибернетика, теория алгоритмов, алгоритмические языки, теория игр, дискретная математика, теория систем и т. д.

* * *

Выбирая специальность, вы часто ориентируетесь на те науки, в которых к настоящему моменту получены наибольшие достижения. Физика — одна из таких наук. Однако вспомним, что проблема высвобождения атомной энергии была сформулирована в 20-х годах. Те, кто поступил тогда на физические факультеты, решили эту проблему в 40—50-х годах. И только тогда об этом заговорила пресса, и абитуриенты хлынули на физические факультеты.

А Макс Планк мечтал посвятить себя математической экономике, но понял, что экономика — слишком сложная наука для его времени, и лишь тогда он решил заняться теоретической физикой.

В настоящее время управление как точная наука только складывается. Ей нужны свои Галилеи, Ньютоны, Эйнштейны и Планки. Ими будут те, кто сейчас придет учиться этой науке. Возможно, что в будущем они смогут сказать словами Дирака: «Я благодарен судьбе, что родился вовремя: будь я старше или моложе на несколько лет, мне не представились бы столь блестящие возможности».

Без сомнения, в этом смысле факультет управления и прикладной математики — самый перспективный из существующих факультетов МФТИ. Однако это и самый трудный для обучения факультет. Здесь наиболее насыщенная учебная программа и загрузка студентов.

С другой стороны, на нашем факультете наиболее полно могут проявиться способности студента. Если вы обладаете инженерным мышлением, то можете заняться прикладными вопросами управления; если физическим, то новыми постановками, формализацией проблем; если же математическим, то строгим доказательством сформулированных на физическом уровне положений и гипотез.

Если вы считаете, что это вам по силам — поступайте на наш факультет!

Ю. Иванилов

Примерные задачи вступительных экзаменов по математике в вузы в 1977 году

Московский государственный университет им. М. В. Ломоносова

Московский государственный университет им. М. В. Ломоносова, как и другие вузы страны, в 1977 году будет проводить вступительные экзамены по математике по двум программам (см. «Квант», № 2).
Предлагаемые ниже задачи рассчитаны на то, чтобы помочь школьникам, кончающим школу в 1977 году по новой программе, подготовиться к вступительным экзаменам по математике на различные факультеты МГУ.

I. Алгебра и начала анализа

1. Найти промежутки возрастания и убывания, исследовать на экстремум и построить графики следующих функций:

а) $y = x^4 - 4x^2$;

б) $y = x + \frac{1}{x^2}$;

в) $y = x^3 - 3x^2 + 2x$.

2. Применение дифференциального исчисления.

а) Найти абсциссы точек графика функции $y = \frac{1}{2}\sin 2x - \sin x$, определенной на отрезке $[0;\ 2\pi]$, касательные в которых к графику этой функции параллельны прямой $y + x - 1 = 0$.

б) Найти величину угла между двумя касательными, проведенными из точки $(0;-1)$ к графику функции $y = x^2$.

3. Задачи на максимум и минимум.

а) Найти критические точки и наибольшие и наименьшие значения следующих функций

$y_1(x) = |x^2 - 3x + 2|, \quad x \in [-5;\ 4]$;

$y_2(x) = |(x+1)(2x-5)^2|, \quad x \in [-2;\ 3]$.

б) В полукруг единичного радиуса вписать прямоугольник наибольшей площади, одна из сторон которого лежит на диаметре.

4. Решить уравнения

а) $\cos x - \sin x = \sqrt{1 + \sin x \cos x}$;

б) $3^{2x^2-6x+3} + 6^{x^2-3x+1} = 2^{2x^2-6x+3}$;

в) $\log_{2x^2-2}(3x^2+x-4) = \log_8 16 - \log_{27} 3$.

5. Решить неравенства

а) $|x^2-5x+6|>\left|\frac{x}{2}-1\right|$;

б) $\log_8 \cos x \leqslant \log_{1/27} 3$;

в) $\frac{1}{\lg x}+\frac{1}{(1-\lg x)}>1$;

г) $\sqrt{2x+\sqrt{x^2+5}} \geqslant x+1$.

6. Вычислить площадь фигуры, ограниченной следующими линиями:

а) $y=x^2$, $x+y=2$;

б) $y=\sqrt[3]{x}$, $y=x^2$;

в) $y=x$, $y=x+\sin^2 x$, $x=\pi/2\ (x>0)$.

7. Задачи с параметрами.

а) Найти все значения параметра a, при которых функция $f(x)=x^3-ax-1$ имеет точку максимума x_0, в которой $f(x_0)>0$.

б) При каком значении параметра a касательные к графику функции $y=x^3-a^2x$, проведенные в точках с абсциссами $x=0$ и $x=a$, перпендикулярны?

в) При каждом значении параметра a решить уравнение

$$|x^2-5x+6|=ax.$$

г) При каждом значении параметра a решить неравенство

$$\frac{ax-1}{x-a}>1.$$

8. Системы уравнений и неравенств.

а) Найти множество решений системы неравенств

$$\begin{cases} 1\leqslant x^2+y^2\leqslant 4, \\ x+y\leqslant 1, \\ x-2y\leqslant 2. \end{cases}$$

б) Найти множество решений системы уравнений

$$\begin{cases} |xy-4|=8-y^2, \\ xy=2+x^2. \end{cases}$$

в) Найти множество решений системы неравенств

$$\begin{cases} 6\cdot 2^{4y}+2^{2y}-12>0, \\ 2^{2y}+2^{y+1}-8<0. \end{cases}$$

II. Геометрия

1. При каком взаимном расположении прямых p и q выполняется равенство $S_pS_q=S_qS_p$, где S_p и S_q — преобразования симметрии относительно указанных прямых.

2. Показать, что если $\alpha_1+\alpha_2=0$, то $R^{\alpha_2}_{O_2}R^{\alpha_1}_{O_1}$ есть параллельный перенос $\vec{a}$, а при $\alpha_1+\alpha_2\neq 0$ поворот R^{α}_{O}. Определить длину и направление $\vec{a}$ в первом случае, O и α во втором.

3. В плоскости даны две взаимно перпендикулярные прямые OX и OY и две точки A и B такие, что $A\in[OX)$, $B\in[OY)$, причем $|OA|=|OB|$. Пусть $l_1=R^{\alpha}_{O}((OY))$ и $l_2=R^{-\alpha}_{A}((AB))$, где $\alpha\in\left[-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}\right]$.

При каких значениях α прямые l_1 и l_2

а) параллельны;

б) перпендикулярны?

4. Найти площадь треугольника ABC, если $|AC|=3$, $|BC|=4$, а медианы AK и BL перпендикулярны.

5. Прямые a_1, a_2 и a_3 параллельны, причем расстояния от прямой a_2, содержащейся в полосе с краями a_1 и a_3, до двух других равны b и c. Найти длину стороны равностороннего треугольника, вершины которого по одной расположены на прямых a_1, a_2 и a_3.

6. На стороне AB и продолжении основания AC равнобедренного треугольника ABC взяты точки D и E соответственно так, что $|AE|=|BE|=b$, $|BD|:|AD|=1:3$. Найти радиус круга, вписанного в треугольник ADE, если известно, что $|AB|=a$ и $b>a$.

7. Равносторонний треугольник с длиной стороны a повернули на угол α ($0\leqslant\alpha<360°$) вокруг своего центра. Найти площадь пересечения исходного и повернутого треугольников.

8. Внутри равностороннего треугольника ABC взята точка O так, что $|OA|=\sqrt{19}$, $|OB|=\sqrt{13}$, $|OC|=\sqrt{17}$. Вычислить $\vec{OB}\cdot\vec{BC}$.

9. В тетраэдре $ABCD$ длины ребер удовлетворяют соотношениям

$$|AB|^2+|DC|^2=|AC|^2+|BD|^2=|AD|^2+|BC|^2.$$

Доказать, что три пары скрещивающихся ребер тетраэдра взаимно перпендикулярны.

10. Плоскость проходит через вершину A треугольной пирамиды $SABC$, делит пополам медиану SK треугольника SAB и пересекает медиану SL треугольника SAC в точке D такой, что $|SD|:|DL|=1:2$. В каком отношении делит эта плоскость объем пирамиды?

11. В куб вписана сфера, касающаяся всех граней куба. Найти длину хорды, которая высекается на сфере прямой, проходящей через середины двух скрещивающихся ребер куба.

12. На трех ребрах куба $K_1=A_1A_2A_3A_4A_1'A_2'A_3'A_4'$ выбраны точки $P_1\in[A_1A_4]$, $P_2\in[A_3A_3']$, $P_3\in[A_1'A_2']$ так, что

$$|P_1A_4|:|P_1A_1|=1:2,$$
$$|P_2A_3|:|P_2A_3'|=1:3,$$
$$|P_3A_2'|:|P_3A_1'|=1:2.$$

К кубу K_1 внешним образом приставлен куб $K_2=B_1B_2B_3B_4B_1'B_2'B_3'B_4'$ так, что $A_1=B_1$, $A_1'\in[B_1B_1']$, $A_2\in[B_1B_2]$, причем $|A_1A_2|:|B_1B_2|=1:3$. Плоскость, проходящая через точки P_1, P_2 и P_3, делит куб K_2 на две части. Найти отношение их объемов.

В. Вавилов, В. Тихомиров

Технические вузы

Вариант 1

1. К двузначному числу приписали справа такое же число. Разность между полученным четырехзначным числом и квадратом исходного двузначного числа разделили на 4% от квадрата исходного числа; в частном получили половину исходного числа, а в остатке — исходное число. Найти исходное двузначное число.

2. Сумма первых пяти членов геометрической прогрессии равна 93, а сумма первых десяти членов той же прогрессии равна 3069. Найти сумму первых пятнадцати членов этой прогрессии.

3. Решить уравнение

$$\frac{\lg^2 x - 2\lg x - 15}{\sqrt{1000 - x}} = 0.$$

4. Решить уравнение

$$\frac{\cos x}{1 + \sin x} + \operatorname{tg} x = 2.$$

5. Найти длину отрезка, параллельного основаниям трапеции, концы которого лежат на ее боковых сторонах, зная, что этот отрезок делит трапецию на две равновеликие фигуры, и что основания трапеции имеют длину a и b ($a > b$).

6. Найти длину высоты конуса наибольшего объема, который можно вписать в шар радиуса R.

Вариант 2

1. Две авиамодели начали одновременно двигаться в одном направлении при встречном ветре, скорость которого v *м/сек*. Первая модель продержалась в полете на t *сек* меньше, чем вторая, но пролетела на a *м* больше. Какая из этих моделей пролетит дальше в безветренную погоду? (Время полета модели не зависит от ветра.)

2. Решить неравенство

$$\frac{2\lg^2 x - 5\lg x + 2}{\sqrt{x - 200}} \geqslant 0.$$

3. Решить уравнение

$$\sqrt{1 + \sin x} + \cos x = 0.$$

4. Найти три числа, образующие геометрическую прогрессию, если их сумма равна 21, а произведение равно 216.

5. Длина стороны квадрата $ABCD$ равна 10 *см*. На его сторонах отложены отрезки $[AA_1]$, $[BB_1]$, $[CC_1]$, $[DD_1]$ длины x каждый, причем $A_1 \in [AB]$, $B_1 \in [BC]$, $C_1 \in [CD]$, $D_1 \in [DA]$. Доказать, что четырехугольник $A_1B_1C_1D_1$ — квадрат, и найти значение x, при котором площадь этого квадрата будет наименьшей.

6. Найти объем пирамиды $DABC$, если $[DB] \perp (ABC)$, величина двугранного угла при ребре AC равна φ, $|DC| = l$, $\widehat{ACB} = \pi/2$, $\widehat{CAB} = \alpha$.

Вариант 3

1. Города A и B расположены на берегу реки, причем A ниже по течению. Из этих городов одновременно поплыли навстречу друг другу две лодки. Достигнув одновременно городов B и A, лодки повернули обратно и встретились на расстоянии 20 *км* от пункта первой встречи. Если бы те же лодки, выйдя одновременно из A и B, поплыли против течения, то лодка, вышедшая из A, догнала бы лодку, вышедшую из B, в 150 *км* от B. Найти расстояние между A и B.

2. Решить неравенство

$$\sqrt{1 - \log_5 (x^2 - 2x + 2)} < \log_5 (5x^2 - 10x + 10).$$

3. Решить уравнение

$$\sin x + \sin 2x + \sin 3x = 1 + \cos x + \cos 2x.$$

4. Найти знаменатель бесконечно убывающей геометрической прогрессии, сумма которой в 4 раза больше суммы первых пяти ее членов.

5. В треугольник ABC вписан прямоугольник, две вершины которого лежат на стороне AC, а две другие — на сторонах AB и BC. Найти наибольшее значение площади такого прямоугольника, если $|AC| = 12$ *см*, $|BD| = 10$ *см*, где $[BD]$ — высота треугольника ABC.

6. Найти объем шара, вписанного в конус, образующая которого наклонена к плоскости основания под углом α, а боковая поверхность равна Q.

Вариант 4

1. Два велосипедиста выехали одновременно из пункта A в одном направлении, первый — со скоростью 8 *км/час*, а второй — 10 *км/час*. Через 30 минут из пункта A в том же направлении выехал третий велосипедист, который догнал первого, а еще через $1\frac{1}{2}$ часа — второго велосипедиста. Найти скорость третьего велосипедиста.

2. Решить уравнение

$$\log_{\sqrt{x} - 1} (2x - 14) = 2.$$

3. Решить неравенство

$$\cos 2x \cdot \cos \frac{\pi}{8} - \sin 2x \cdot \sin \frac{\pi}{8} \geqslant 0{,}5\sqrt{2}.$$

4. Тангенсы половин углов некоторого треугольника образуют арифметическую прогрессию. Докажите, что тогда и косинусы углов этого треугольника образуют арифметическую прогрессию.

5. Около круга радиуса R описан четырехугольник, две стороны которого параллельны друг другу, а две другие — конгруэнтны. Найти наименьшее значение площади такого четырехугольника.

6. Найти объем правильной четырехугольной пирамиды, высота которой равна H, а плоский угол при вершине α.

Л. Садовский, Н. Дегтярев



Ошибки в «Ошибках...»

Представьте себе, что вы принимаете вступительные экзамены по математике. Перед вами сидит абитуриент, ждет ваших вопросов, а вы должны объективно и справедливо оценить его знания.

Сначала вы предлагаете ему решить следующую задачу: *найти корни уравнения*

$$\log_{3x^2}(9x^4)-\log_{x^2/3}x^2=0. \quad (1)$$

Поступающий дает такое решение.

«Областью допустимых значений неизвестного данного уравнения является множество действительных чисел, кроме $x=0$». Затем, перейдя к новому основанию логарифмов $|x|$ и предварительно проверив, что $|x|=1$ не будет корием уравнения (1), абитуриент получает уравнение

$$\frac{\log_{|x|}(9x^4)}{\log_{|x|}(3x^2)}-\frac{\log_{|x|}x^2}{\log_{|x|}\frac{x^2}{3}}=0,$$

из него

$$(\log_{|x|}3+2)(1-\log_{|x|}3)=0,$$

откуда, наконец, получает и

«Ответ:

$$x_1=\frac{1}{\sqrt{3}},\ x_2=-\frac{1}{\sqrt{3}},$$

$$x_3=3,\ x_4=-3.» \quad (2)$$

Вы, видимо, объясните абитуриенту, что он допустил грубую ошибку. В действительности ОДЗ уравнения (1) таково:

$$x\neq 0,\ x\neq\frac{1}{\sqrt{3}},$$

$$x\neq-\frac{1}{\sqrt{3}},$$

$$x\neq\sqrt{3},\ x\neq-\sqrt{3},$$

а потому указанные в ответе (2) значения $x_1=1/\sqrt{3}$ и $x_2=-1/\sqrt{3}$ кориями уравнения (1) ие являются. Кроме того, вы отметите, что переход к новому основанию логарифмов $|x|$ — крайне иерациональный метод решения уравнения (1); оно решается устно, поскольку $\log_{3x^2}(9x^4)=2$.

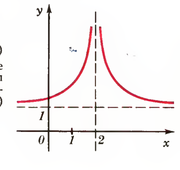
Поставив перед абитуриентом другую задачу: *построить график функции*

$$y=\left|\frac{x-1}{x-2}\right|, \quad (3)$$

вы с первого взгляда на полученный абитуриентом график (см. рисунок) заметите, что и эта задача решена неверно. В самом деле, функция (3) при $x=1$ принимает нулевое значение, тогда как изображениая на рисунке кривая с осью абсцисс ие пересекается.

Можно определенио утверждать, что поступающий с такими знаниями студентом ие станет. Однако пора открыть секрет: приведенные ошибочные решения взяты вовсе не из работы иерадивого абитуриента, а из пособия для поступающих*), где они, как ни страиио, выдаются за правильные (см. стр. 48—49, 99—100).

*) Тупиков В. А., Ошибки в решении конкурсных задач иа вступительных экзаменах по математике, изд. 4-е, переработанное и дополиенное (Минск «Вышэйшая школа», 1974, 144 стр., тираж 150 000 экз., цена 16 коп.).



Вступительные экзамены по математике в вузы дают обширный фактический материал для выявления недостатков в подготовке абитуриеитов. И очень заманчиво выглядит идея на основе всестороннего и тщательного анализа типичных недостатков работ и ответов поступающих разъяснить наиболее слабо усваиваемые теоретические вопросы школьного курса, вскрыть причины ошибок в решении задач.

Именно такую идею, видимо, стремился реализовать автор в своем пособии, и это следовало бы только приветствовать. Но, к сожалению, в целом предпринятая им попытка оказалась весьма неудачиой: подбор примеров выглядит случайиым, а их анализ — поверхностным. И, самое главное, слишком часто ошибки и неточиости самого автора подстать тем, от которых ои пытается предостеречь читателя.

Много места в книге заиимает важный вопрос — решение уравнений и неравенств. Но сколько путаницы допускает автор при рассмотрении конкретных задач! Например, на с. 20 дается определение ОДЗ (правильное), а иа с. 47 утверждается, что ОДЗ уравнения

$$20\log_{4x}\sqrt{x}+7\log_{16x}x^3-3\log_{x/2}x^2=0$$

есть множество $x>0$, что лишь по случайности не приводит в дальнейшем к ошибке. Непоследовательиость автора можно проиллюстрировать тем, что $x=-6$ он считает корнем уравнения

$$(x+5)^{x^2+x-2}=1$$

(стр. 39—40), однако $x=-3$, $y=2$ решением системы

$$\begin{cases} x^y=9, \\ \sqrt[y]{324}=2x^2 \end{cases}$$

не признает (с. 50—51). Из текста невозможно понять, когда проверка является обязательиой частью решения уравнения и когда ее проводить ие нужио (см. с.26, 37, 45 и др.). По поводу уравнения

$$\sqrt{2x^2-8x+12}=6 \quad (4)$$

автор пишет: «Поскольку после возведения в квадрат могли появиться посторонние корни, необходима проверка» (с. 34). Между тем в данном случае делать проверку как раз не надо, достаточно заметить, что обе части уравнения (4) неотрицательны, и потому возведение в квадрат приводит к равносильному уравнению.

Воспроизведем еще одно по меньшей мере странное определение: «Совокупность тех значений независимой переменной x, для которых функция $y=f(x)$ определена, т. е. каждому значению независимой переменной x соответствует одно или несколько вполне определенных значений функции, называется *областью определения* этой функции» (с. 86).

Отметим, что автор далеко не всегда приводит наиболее рациональные или удачные решения. Так, к тригонометрическим уравнениям, разбираемым на с. 63—67, гораздо проще применить метод введения вспомогательного угла. Некоторые замечания и рекомендации, высказанные в книге, представляются сомнительными и спорными. Например, поступающему не следует заучивать тригонометрические формулы, выходящие за рамки программы вступительных экзаменов (с. 56, 59); при решении геометрических задач не требуется (если в условии специально не оговорено противное) проводить исследование решения (с. 104, 129, 134) и т. д. Наконец, замечание, последнее по счету, но отнюдь не по важности: книга написана плохим языком, в ней сплошь и рядом встречаются неудачные и даже неграмотные обороты речи.

Хотя для поступающих было бы очень полезно и поучительно познакомиться с ошибками своих предшественников, рассматриваемое пособие юному читателю рекомендовать нельзя: оно не дает ясного понимания сути этих ошибок и путей их преодоления. Отмеченные существенные недостатки пособия тем более странны, что речь идет о четвертом издании и, следовательно, у автора уже имелась возможность исправить случайные недосмотры и переработать неудачные места.

Л. Слукин

Неравенства и ... вероятность

Следующая задача была предложена венгерской командой советской команде на одной из международных олимпиад: *если* $p+q=1$, $0<p<1$, m, n — *натуральные числа, большие* 1, *то*

$$(1-p^m)^n+(1-q^n)^m>1.$$

Эта задача с трудом поддается алгебраическому исследованию. Но, оказывается, ее можно просто и красиво решить с помощью теории вероятностей.

Пусть имеется таблица из n строк и m столбцов; в каждую клетку ставится либо 0, либо 1, причем вероятность того, что ставится 0, равна p (тогда 1 ставится с вероятностью q). Ясно, что $1-p^m$ — это вероятность того, что в некоторой фиксированной строке стоит хотя бы одна единица, а $(1-p^m)^n$ — того, что в каждой строке стоит хотя бы одна единица. Аналогично $(1-q^n)^m$ — вероятность того, что в каждом столбце стоит хотя бы один нуль. Одно из этих событий наверняка произойдет (если найдется строка из нулей, и столбец из единиц, то что же стоит на их пересечении?). Поэтому сумма вероятностей этих событий не меньше 1 (проверьте, что при $m>1$, $n>1$ эта сумма должна быть больше 1).

Ну, а если не знать, что такое вероятность? Оказывается, легко перевести это решение на язык комбинаторики. Для этого нужно рассмотреть случай, когда $p=r/s$ — рациональное число. Для каждой клетки таблицы возьмем запас цифр из r нулей и $s-r$ единиц и будем составлять всевозможные заполненные таблицы. Вероятность заменяется на число таблиц, а фраза «одно из этих событий наверняка произойдет» — на «объединение двух этих множеств таблиц есть все множество». Подумайте, как избавиться от предположения, что p — рационально.

А теперь решите такие задачи-обобщения.

1. Пусть $0<p_{ij}<1$ ($1\leqslant i\leqslant m$, $1\leqslant j\leqslant n$), а $q_{ij}=1-p_{ij}$. Тогда $(1-p_{11}\ldots p_{1m})\cdot(1-p_{21}\ldots p_{2m})\cdot\ldots\cdot(1-p_{n1}\ldots p_{nm})+(1-q_{11}\ldots q_{n1})\cdot(1-q_{12}\ldots q_{n2})\times\ldots\cdot(1-q_{1m}\ldots q_{nm})\geqslant 1$, где $m\geqslant 1$, $n\geqslant 1$.

2. Пусть $0<p_i<1$ ($i=1, 2, \ldots, k$), $p_1+\ldots+p_k=1$, m_i — натуральные числа. Тогда $(1-(p_2+\ldots+p_k)^{m_2\ldots m_k})^{m_1}+\ldots+(1-(p_1+\ldots+p_{k-1})^{m_1\ldots m_{k-1}})^{m_k}\geqslant 1$ («многомерное» обобщение).

А. Р.



Форум юных астрономов

16 августа 1976 года вереница автобусов привезла на территорию Шемахинской астрофизической обсерватории АН Азербайджанской ССР необычных пассажиров. Это приехали хозяева красочного палаточного городка с романтическим названием «Звездный» — 230 мальчишек и девчонок из 45 городов и сел нашей страны, посланцы многотысячной армии любителей астрономии на III Всесоюзный слет юных астрономов.

17 августа состоялось открытие слета. В этот день на торжественной линейке ребят приветствовал дважды Герой Советского Союза летчик-космонавт СССР Н. Н. Рукавишников. С теплыми словами приветствия обратился к ребятам секретарь ЦК ЛКСМ Азербайджана В. А. Гусейнов, директор Шемахинской обсерватории академик АН АзССР Г. Ф. Султанов, министр просвещения республики М. М. Мехти-заде, ученый секретарь Всесоюзного астрономо-геодезического общества (ВАГО) кандидат физико-математических наук В. А. Бронштэн, ответственные работники ЦК ВЛКСМ и Министерства просвещения СССР.

Многообразны интересы ребят в астрономии. Поэтому основная работа на слете проходила по секциям. Всего было создано 7 секций: «Солнце», «Кометы и метеоры», «Переменные звезды», «Луна и планеты», «Астрофизика», «Телескопостроение и астрофотография» и «Служба неба». Ежедневно проводились сначала теоретические занятия (лекции, беседы, доклады), затем лабораторные работы, обработка результатов наблюдений, полученных раньше, и, естественно, ночные наблюдения (с 22 до 02 часов).

На секциях ребята выступили с 79 докладами, из которых 28 было отобрано на общую конференцию. Такое обилие докладов не случайно. В последние годы юные астрономы все более и более активно ведут целеустремленную наблюдательную работу (не редки случаи плодотворных контактов коллективов юных астрономов с профессиональными астрономическими обсерваториями). Многие ребята занимаются теоретическими исследованиями. Существуют коллективы, в общем объеме работ которых преобладает популяризаторская деятельность. Все это, естественно, накладывало отпечаток на тематику докладов и их содержание. Чтобы не быть голословным, можно назвать темы некоторых докладов. Так, Владимир Крупко из Омска прочитал доклад «Организация астрономического кружка в 5-х, 6-х классах», Георгий Безруков (Волгоград) рассказал о наблюдениях Новой в Лебеде, Эдуард Миссаров (Ташкент) поделился с ребятами результатами наблюдений переменных звезд, Азик Куламбаев (Алма-Ата) рассказал о методике и результатах эквиденситометрии (исследования линий равной плотности фотоизображения) кометы Беннета, Александр Казаков (Горький) поделился опытом применения телевизионных методов при изучении космических объектов, Сергей Гурьянов и Юрий Баталов из Красноярска рассказали о том, как они открыли комету Кобаяси — Бергера — Милона.

Ребята и руководители делегаций приняли участие в двух пресс-конференциях. Более 80 вопросов было задано ученым юными астрономами. Из чего состоят кольца Сатурна? Существуют ли в пространстве отрицательные массы? Планируется ли в ближайшее время запуск женщин-космонавтов? Каковы возможности исследования пилотируемыми кораблями дальних планет Солнечной системы? Каковы перспективы исследования космического пространства в СССР и за рубежом? Есть ли в пространстве антиматерия и как ее обнаружить? И многое, многое другое. Юные астрономы получили полные ответы на все свои вопросы. Да это и не удивительно, так как в пресс-конференциях участвовали летчик-космонавт СССР Н. Н. Рукавишников, профессор МГУ К. А. Куликов, ученый секретарь ВАГО В. А. Бронштэн, ведущие ученые Шемахинской астрофизической обсерватории О. Х. Гусейнов, С. Г. Мамедов, И. А. Асланов, С. З. Омаров. Пресс-конференции показали не только большую любознательность ребят, но и их эрудицию, широту и глубину их интересов, знание основ астрономии и космонавтики.

Ребята общались с учеными не только на пресс-конференциях. Они неоднократно встречались с учеными ШАО во время секционных занятий, часть которых проходила в лабораториях и на инструментах обсерватории. Учеными из Москвы К. А. Куликовым, Э. В. Кононовичем, А. В. Засовым, Л. М. Гиндилисом, В. А. Бронштэном было прочитано для ребят 10 лекций по самым актуальным вопросам современной астрономии. А с каким нетерпением все ждали начала диспута с интригующим названием «Есть ли жизнь во Вселенной?». Вел этот диспут один из известных (не только в нашей стране, но и за рубежом) специалистов по проблеме внеземных цивилизаций Л. М. Гиндилис. Ребята высказали много интересных соображений о возможности и целесообразности контактов с инопланетными разумными существами, пофантазировали о формах жизни во Все-

леннои, о путях развития земной цивилизации. И пусть их рассуждения зачастую были наивными, не аргументированными — отрадно то, что они по-своему пытались решать эти извечно актуальные и сложные проблемы. На наш взгляд, главное в подобной дискуссии — показать ребятам данную проблему так, как ее понимает современная наука, и заставить их задуматься над этой проблемой.

Индивидуальность юных астрономов, их знания, умения и навыки, полученные в процессе занятий в своем коллективе, проявились также на выставке творческих работ юных астрономов. На выставку было представлено около 200 экспонатов от 30 коллективов. Что характерно для выставки? Прежде всего, обилие иллюстративного материала, демонстрирующего успехи коллективов юных астрономов, формы, методы и содержание их работы, достижения коллективов в проведении любительских астрономических наблюдений. Нельзя не отметить прекрасные фотографии звездного неба, Луны, планет, серебристых облаков, Солнца и солнечных пятен, полученные юными астрономами Донецка, Ярославля, Алма-Аты, Углича. Хорошая подборка методических материалов была представлена на выставке Клубом юных техников Сибирского отделения АН СССР. Посетителям выставки запомнились красиво оформленные альбомы, показывающие работу Крымской областной юношеской астрономической обсерватории.

Конструкторская работа юных астрономов была представлена на выставке несколькими коллективами. Здесь в первую очередь надо сказать о юных астрономах Бакинского Дворца пионеров и школьников имени Ю. А. Гагарина, которые выставили целую серию самодельных телескопов и астрографов. Самодельные телескопы демонстрировал также один из молодых участников слета — коллектив юных телескопостроителей Новосибирского городского Дворца пионеров. Портативные астрографы были представлены коллективами Москвы, Симферополя, Углича. Делегация Углича показывала прибор для визуальных и фотографических наблюдений Солнца. Необходимо сказать, что перечисленные выше приборы интенсивно использовались в работе соответствующих секций. На них проводились визуальные и фотографические наблюдения Луны, Юпитера, Солнца, звезд и звездных полей. Хочется отметить некоторые учебно-наглядные пособия по астрономии. Это подвижные карты звездного неба, изготовленные ребятами из Горького и Ташкента, а также серия лабораторных работ по изучению образования пятен на Солнце, разработанная в школе № 5 города Углича.

Жюри слета высоко оценило деятельность отдельных юных астрономов и коллективов. По решению жюри ценными подарками награждены 37 ребят и 12 коллективов. Помимо этого, 7 коллективов рекомендованы к участию на ВДНХ СССР в павильоне «Юные техники и натуралисты». Для награждения медалями «Юный участник ВДНХ СССР» представлены 50 юных астрономов; 6 руководителей коллективов представлены к награждению золотыми, серебряными и бронзовыми медалями ВДНХ СССР.

Особые призы жюри — три тома атласа звездного неба — были вручены Казимиру Чернису (Эстония) и Юрию Фомину (Москва) за независимое обнаружение кометы д'Аре. Это знаменательное событие произошло на слете в ночь с 17 по 18 августа. Специальный приз за внеконкурсную работу получила Ирина Михайлова. Ею был написан реферат «Жизнь и творчество среднеазиатских ученых в области астрономии». Как сказал председатель жюри слета профессор К. А. Куликов, это фундаментальное исследование школьницы достойно того, чтобы быть помещенным в сборнике «Историко-астрономические исследования».

У читателя может сложиться впечатление, что все время ребят было посвящено занятиям астрономией. Нет, много времени занимал и организованный отдых — спортивные соревнования, труд-десант, экскурсии на обсерваторию ШАО, «огоньки» знакомства, экскурсии по окрестностям обсерватории, просмотр самодельных цветных слайдов.

Конференция, выставка творческих работ юных астрономов, семинар руководителей коллективов показали возросшую активность любителей астрономии в проведении разнообразных астрономических наблюдений. В то же время необходимо отметить, что до сего времени коллективы юных астрономов практически не занимаются астроприборостроением и, следовательно, не проводят наблюдений с использованием классических методов астрофизики. Практически отсутствует общение между коллективами; коллективы работают разобщенно, не обмениваются информацией. К недостаткам работы юных астрономов следует отнести и то, что наблюдения уникальных явлений, а также длинные ряды наблюдений в некоторых коллективах не обрабатываются, лежат мертвым грузом.

На слете были намечены конкретные мероприятия, которые должны способствовать поднятию любительской астрономии на более высокий уровень. В частности, предполагается провести в 1978 году Всесоюзную школу-семинар руководителей коллективов. Рекомендуется проводить региональные сборы юных астрономов на базе таких коллективов, как астрономический кружок Бакинского Дворца пионеров и школьников, Крымская областная юношеская астрономическая обсерватория, астрономическая лаборатория Клуба юных техников СО АН СССР, Ярославское общество юных любителей астрономии, астрономическая обсерватория пионерлагеря «Орленок».

Таким образом, III Всесоюзный слет юных астрономов позволил выяснить состояние любительской астрономии, конкретизировать цели и задачи, наметить пути дальнейшего развития и совершенствования любительской астрономии.

С. Войнов



К статье «Площадь и интеграл»

1. 1/2. 2. 11/2. 3. 4/3. 4. 16/3. 5. $2+\pi^3/6$. 6. 4. 7. 1/3.

К статье «Рационально или иррационально?»

1. Указание. $\frac{\pi}{2}+k\pi=\pi\left(k+\frac{1}{2}\right)$.

2. Указание. Если T рационально, то $T+x$ рационально при рациональном x и иррационально при иррациональном x.

3. Указание. Рациональное число в любой целочисленной степени будет числом рациональным.

4. а) Нет, так как $a=\frac{(a+b)+(a-b)}{2}$, $b=\frac{(a+b)-(a-b)}{2}$.

б) Да, пример: $a=b=\sqrt{2}$ или $a=\sqrt{2}+1$, $b=\sqrt{2}-1$.

в) Нет.
г) Да.
д) Нет.

Указание. Выразить a и b через данные числа.

5. Из рациональности второй дроби вытекает, что a^2 рационально, а из рациональности первой дроби, — что и a рационально.

6. Указание. Воспользоваться приемом решения примера 4.

7. а) Иррационально, так как $\sqrt{3}=\left(\left(\sqrt{1+\sqrt{2+\sqrt{3}}}\right)^2-1\right)^2-2$.

б) Указание. $6\pm\sqrt{11}=\frac{12\pm2\sqrt{11}}{2}=\frac{(\sqrt{11}\pm1)^2}{2}$.

в) Положим $\sqrt[3]{20+14\sqrt{2}}+\sqrt[3]{20-14\sqrt{2}}=x$, тогда $x^3-6x-40=0$, откуда $x=4$.

8. а) Да, $\sqrt{\frac{1}{2}}+\sqrt{\frac{1}{2}}=\sqrt{2}$.

б) Нет, так как $a+2\sqrt{ab}+b=\sqrt{2}$, $\sqrt{ab}=\frac{1}{2}[\sqrt{2}-(a+b)]$,

$ab=\frac{1}{4}[2+(a+b)^2-2(a+b)\sqrt{2}]$,

и справа — число иррациональное, поскольку $a+b\neq0$.

10, 11. Указание. Действовать, как при решении примера 7.

12. Указание. См. решение примера 8.

13. Указание. См. решение примера 10.

К статье «Московский физико-технический институт»

Математика

Билет 1

1. Возведя обе части данного уравнения в квадрат и упростив полученное выражение, находим $6-3x=\sqrt{6x^2-18x+12}$. После повторного возведения в квадрат приходим к уравнению $x^2-6x+8=0$, откуда $x_1=2$, $x_2=4$. Проверка показывает, что решением является только $x_1=2$.

2. ОДЗ неравенства: $x<2$, поэтому $\log_2(x^2-4x+4)=2\log_2(2-x)$. Замечая еще, что $\log_{1/2}(2-x)=-\log_2(2-x)$, после равносильных преобразований получим

$$(1-x)[\log_2(2-x)-2]>0.$$

Это неравенство равносильно совокупности двух систем неравенств:

$$\begin{cases}1-x>0,\\2-x>4;\end{cases}\quad\begin{cases}1-x<0,\\0<2-x<4.\end{cases}$$

Решениями этих систем являются соответственно: $x<-2$, $1<x<2$.

3. 3:1. Указание. Поскольку $|AB|<|BC|$, точки на прямой расположены в следующем порядке: A, B, C, D. Далее проведите прямую через центры окружностей. Самое простое решение задачи получается применением следующей теоремы (попробуйте доказать ее самостоятельно): *если две хорды PQ и RS одной окружности пересекаются в точке M, то* $|PM|\cdot|MQ|=|RM|\cdot|MS|$. Другое решение использует перпендикуляр O_1E, опущенный из центра O_1 большей окружности на $[AD]$.

4. $x_1=m\pi$, $y_1=2n\pi$; $x_2=-\arccos\frac{1}{7}+2m\pi$, $y_2=2\pi/3+2n\pi$; $x_3=\arccos\frac{1}{7}+2m\pi$, $y_3=-2\pi/3+2n\pi$ $(m, n=0, \pm1, \pm2, \ldots)$.

Указание. Перемножив уравнения почленно, после преобразований придем к уравнению

$$\operatorname{tg}^2\frac{y}{2}=4\sin^2 y.$$

Оно имеет три серии решений: $y_1=2n\pi$, $y_2=2\pi/3+2n\pi$, $y_3=-2\pi/3+2n\pi$ $(n=0, \pm1, \pm2, \ldots)$. Каждое из найденных значений y подставим в оба уравнения исходной системы. Для $y_1=2n\pi$ получим $\sin x=0$; для $y_2=2\pi/3+2n\pi$ получим систему

$$\begin{cases}\sqrt{3}\cos x-5\sin x=3\sqrt{3},\\3\sqrt{3}\cos x-\sin x=\sqrt{3},\end{cases}$$

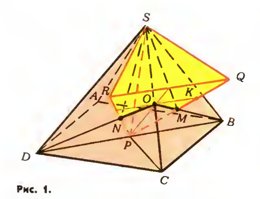


Рис. 1.

откуда $\cos x = 1/7$, $\sin x = -4\sqrt{3}/7$; для $y_3 = -2\pi/3 + 2n\pi$ аналогично получим $\cos x = 1/7$, $\sin x = 4\sqrt{3}/7$.

5. Пусть $O = (SC) \cap (PQR)$ (рис. 1), тогда по условию $[SO]$ — высота тетраэдра $SPQR$. Осюда следует, что точка O — центр грани PQR. Обозначим через a длину ребра тетраэдра, тогда $|SP| = a$, $|PO| = \frac{a}{\sqrt{3}}$, $|SO| = a\sqrt{\frac{2}{3}}$. Из подобия $\triangle SPO$ и $\triangle SCP$ находим

$$|PC| = |PO| \cdot \frac{|SP|}{|SO|} = \frac{a}{\sqrt{2}}.$$

Следовательно, длина стороны квадрата $ABCD$ равна a. Отсюда $V = \frac{a^3}{3}$.

Общей частью данных пирамид является пирамида $SOMPN$ $(M = (OB) \cap (PQ)$, $N = (OD) \cap (PR))$ с высотой SO. Определим площадь основания $PMON$. Имеем

$$S_{\Delta POM} = \frac{|OM|}{|OB|} \cdot S_{\Delta POB},$$

$$S_{\Delta POB} = \frac{1}{2}|PO| \cdot |PB| = \frac{a^2}{2\sqrt{6}}.$$

Найдем $|OM| : |OB|$. Проведем прямую OK параллельно прямой RQ. Тогда $|OK| = \frac{a}{3}$.

Из подобия ΔOMK и ΔBMP имеем

$$|OM| : |MB| = |OK| : |PB| = \sqrt{2} : 3$$

и, учитывая, что $|OB| = |MB| + |OM|$, находим

$$|OM| : |OB| = \frac{\sqrt{2}}{3 + \sqrt{2}}.$$

Следовательно,

$$S_{\Delta POM} = \frac{a^2}{2\sqrt{3}(3 + \sqrt{2})}.$$

Аналогично получаем

$$S_{\Delta PON} = \frac{a^2}{2\sqrt{3}(3 + \sqrt{2})},$$

откуда

$$S_{PMON} = \frac{a^2}{\sqrt{3}(3 + \sqrt{2})}.$$

Объем пирамиды $SOMPN$ равен

$$\frac{1}{3}|SO| \cdot S_{PMON} = \frac{\sqrt{2}\,a^3}{9(3 + \sqrt{2})} = \frac{3\sqrt{2} - 2}{21} V.$$

Билет 2

1. -2. Указание. Пусть a_1, a_2, a_3 — соответственно первый, второй и третий члены арифметической прогрессии, q — знаменатель геометрической прогрессии. Тогда $a_1 = qa_2$, $a_3 = q^2 a_2$, причем $a_2 \neq 0$ (иначе $a_1 = qa_2 = 0$, $a_1 - a_2 = 0$) и

$$a_2 - qa_2 = q^2 a_2 - a_2,$$

откуда $q^2 + q - 2 = 0$.

2. $x_1 = 2$, $y_1 = 1$, $x_2 = \sqrt{2}$, $y_2 = \frac{1}{\sqrt{2}}$. Указание. ОДЗ: $x > y > 0$. Первое уравнение системы можно записать в виде

$$(\lg x - \lg y)(\lg x + \lg y) = (\lg x + \lg y)^2,$$

откуда либо $\lg x + \lg y = 0$, $y = 1/x$, либо $\lg x - \lg y = \lg x + \lg y$, $\lg y = 0$, $y = 1$.

3. $x_1 = 3\pi/4 + n\pi$, $x_2 = 3\pi/2 + 2n\pi$, $x_3 = 2n\pi$, $x_4 = \pi/4 + (-1)^n \arcsin \frac{1}{2\sqrt{2}} + n\pi$ (n — целое). Указание. Привести уравнение к виду

$$(\sin x + \cos x)(\sin x - \cos x + 1)(2\sin x - 2\cos x - 1) = 0.$$

4. $\frac{\pi - \alpha}{2}$, $\operatorname{arctg} \frac{\sin\alpha}{2 + \cos\alpha} = \arcsin \frac{\sin\alpha}{\sqrt{5 + 4\cos\alpha}}$, $\frac{\alpha + \pi}{2} - \operatorname{arctg} \frac{\sin\alpha}{2 + \cos\alpha}$.

Указание. Возьмем на $[AB]$ точку M так, что $|BM| : |MA| = 1:2$. Тогда $(MK) \parallel (AD)$ и из условия $|AB| = 2|BC| + |AD|$ следует, что $|AM| = 2|MK|$. Далее $|BM| = |MK|$, $\widehat{BMK} = \alpha$, отсюда $\widehat{MBK} = (\pi - \alpha)/2$, и затем из ΔAMK по теореме косинусов находим $|AK| : |MK|$ и по теореме синусов $\sin \widehat{MAK}$.

5. $(3\sqrt{2} \pm \sqrt{3})$ *см*.

Физика

Билет 1

1. Запишем уравнения движения саней и человека для проекций на ось координат,

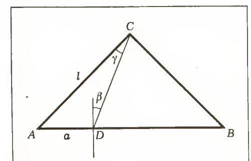


Рис. 2.

направленную вниз по склону горы:

$$M|\vec{g}|\sin\alpha-\mu(M+m)|\vec{g}|\cos\alpha+|\vec{F}|=0,$$

$$m|\vec{g}|\sin\alpha-|\vec{F}|=ma.$$

Здесь $\vec{F}$ — сила взаимодействия между человеком и санями, $\vec{a}$ — ускорение человека. Из этих уравнений

$$a=\frac{(M+m)\,|\vec{g}\,|}{m}(\sin\alpha-\mu\cos\alpha)\approx-3\ м/сек^2,$$

т. е. человек должен двигаться по саням вверх с ускорением 3 $м/сек^2$.

2. Согласно первому закону термодинамики, количество теплоты Q, которое необходимо сообщить газу при изотермическом расширении, равно работе A газа. Поскольку относительное увеличение объема мало, можно считать, что давление при расширении уменьшается по линейному закону. Тогда

$$A=p_{\text{ср}}\,\Delta V=\frac{1}{2}(p_1+p_2)\,\Delta V.$$

Из закона Бойля — Мариотта

$$p_2=\frac{p_1V_1}{V_1+\Delta V}=p_1\frac{1}{1+\dfrac{\Delta V}{V_1}}\approx p_1\left(1-\frac{\Delta V}{V_1}\right).$$

Следовательно,

$$Q=A\approx p_1\Delta V\left(1-\frac{\Delta V}{2V_1}\right)=$$

$$=\frac{m}{\mu}RT\frac{\Delta V}{V_1}\left(1-\frac{1}{2}\frac{\Delta V}{V_1}\right)\approx 4{,}88\ дж.$$

3. В установившемся режиме сила $\vec{F}_{\text{м}}$, действующая на свободный заряд в магнитном поле, компенсируется электростатической силой $\vec{F}_{\text{э}}$:

$$|\vec{F}_{\text{м}}|=|\vec{F}_{\text{э}}|,\ \text{или}\ q\,|\vec{v}\,|\,|\vec{B}\,|=q\,\frac{U}{d}.$$

Отсюда

$$|\vec{v}\,|=\frac{U}{|\vec{B}\,|\,d}=2\ м/сек.$$

4. Через грань BC не будет видна часть текста, находящаяся под участком AD основания призмы (рис. 2). Из треугольника ACD по теореме синусов $\dfrac{l}{\sin(90^\circ+\beta)}=$ $=\dfrac{a}{\sin\gamma}$, где $a=(1-\alpha)\sqrt{2}l$, $\sin\beta=\dfrac{1}{n}$, $\gamma=45^\circ-\beta$. Отсюда найдем показатель преломления n:

$$n=\sqrt{1+\frac{1}{(2\alpha-1)^2}}\approx 1{,}6.$$

Билет 2

1. В системе отсчета, связанной с центром масс соударяющихся атомов, суммарный импульс равен нулю:

$$m_\alpha\left(\left|\vec{v}_\alpha\right|-\left|\vec{v}\right|\right)+m_{\text{C}}\left(\left|\vec{v}_{\text{C}}\right|-\left|\vec{v}\right|\right)=0,$$

где $m_{\text{C}}=3m_\alpha$ и $\left|\vec{v}_\alpha\right|=2\left|\vec{v}_{\text{C}}\right|$. Отсюда скорость центра масс

$$\left|\vec{v}\right|=\frac{m_\alpha\left|\vec{v}_\alpha\right|+m_{\text{C}}\left|\vec{v}_{\text{C}}\right|}{m_\alpha+m_{\text{C}}}=$$

$$=\frac{5}{8}\left|\vec{v}_\alpha\right|=625\ м/сек.$$

2. После каждого соударения с движущимся поршнем скорость молекул газа уменьшается на $2\,|\vec{u}\,|$. А сколько соударений возможно? Обозначим через t время между первым и вторым соударениями, тогда

$$t=\frac{2H-x}{\left|\vec{v}_1\right|}=\frac{2H-x}{\left|\vec{v}\right|-2\left|\vec{u}\right|},$$

где $x=\left|\vec{u}\right|t$ — соответствующее смещение поршня. Отсюда

$$x=\frac{2\left|\vec{u}\right|}{\left|\vec{v}\right|-3\left|\vec{u}\right|}H=\frac{2}{5}H<\frac{3}{5}H,$$

следовательно, часть молекул претерпит два соударения, и их скорости после второго соударения $\left|\vec{v}_2\right|\geqslant\left|\vec{v}\right|-4\left|\vec{u}\right|=$ $=100\ м/сек$. Аналогично можно показать, что третье соударение невозможно. Поэтому окончательно

$$100\ м/сек\leqslant\left|\vec{v}_2\right|\leqslant 200\ м/сек.$$

3. Пластины конденсатора взаимодействуют с электрическим полем, созданным заряженной плитой. Напряженность этого поля $\left|\vec{E}\right|=\dfrac{Q}{2\varepsilon_0S}$. Заряд конденсатора q создает свое электрическое поле $\left|\vec{E}_1\right|=$ $=\dfrac{q}{\varepsilon_0S}=\dfrac{\mathscr{E}}{d-d_1}$, откуда $q=\dfrac{\mathscr{E}\varepsilon_0S}{d-d_1}$.

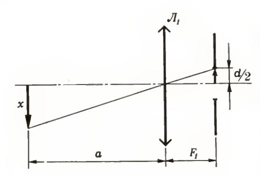


Рис. 3.

На конденсатор действует суммарная электростатическая сила

$$\left|\vec{F}\right| = 2q\left|\vec{E}\right| = \frac{\mathscr{E} Q}{d-d_1} = 10^{-4}\ н = 10\ \ дин.$$

4. Изображение стены в первой линзе находится в ее фокальной плоскости ($a \gg F_1$), поэтому (см. рис. 3) $\frac{x}{d/2} = \frac{a}{F_1}$,

где x — видимый размер стены. Кроме того, для оптической системы имеют место соотношения $\beta = \frac{F_2}{F_1}$ и $F_1 + F_2 = L$. Тогда

$$x = \frac{(1+\beta)\, ad}{2L} = 1\ м.$$

Билет 3

1. Запишем законы сохранения энергии и импульса:

$$\frac{m_1\left|\vec{v}_1\right|^2}{2} + \frac{m_2\left|\vec{v}_2\right|^2}{2} = Q,$$

$$m_1\left|\vec{v}_1\right| = m_2\left|\vec{v}_2\right|$$

(индекс «1» относится к нейтрону, а «2» — к ядру бериллия). Отсюда

$$E_1 = \frac{m_1\left|\vec{v}_1\right|^2}{2} = \frac{Qm_2}{m_1+m_2} =$$

$$= \frac{7}{8}Q = 2{,}95\ Мэв,$$

$$E_2 = Q - E_1 = 0{,}42\ Мэв.$$

2. Из уравнения теплового баланса

$$Q = C_V\frac{m}{\mu}(T_1 - T)$$

и уравнений состояния идеального газа

$$pV = \frac{m}{\mu}RT \text{ и } p_1V = \frac{m}{\mu}RT_1$$

найдем установившееся в сосуде давление:

$$p_1 = p\left(1 + \frac{RQ}{C_VpV}\right) \approx 2p = 1520\ мм\ рт.\ ст.$$

3. Обозначим новый заряд на конденсаторе через q_1. Разность потенциалов между пластинами равна

$$\mathscr{E} = \frac{q_1}{\varepsilon_0 S}\cdot\frac{3}{4}d + \frac{Q}{2\varepsilon_0 S}\left(\frac{d}{2} - \frac{d}{4}\right),$$

где $\mathscr{E} = \frac{q}{\varepsilon_0 S}d$. Отсюда $q_1 = \frac{8q - Q}{6}$, и

$$\Delta q = q_1 - q = \frac{2q - Q}{6} = -\frac{1}{3}\cdot 10^{-9}\ к.$$

4. Запишем законы сохранения энергии и импульса для системы атом — фотон:

$$h\nu = h\nu_0 + \frac{\left|\vec{p}\right|^2}{2Am_p},$$

$$\left|\vec{p}\right| = \frac{h\nu}{c}.$$

Отсюда получаем

$$h\nu = h\nu_0 + \frac{(h\nu)^2}{2Am_p c^2}.$$

Физический смысл имеет только один корень

$$h\nu = Am_p c^2 - Am_p c^2\sqrt{1 - 2\frac{h\nu_0}{Am_p c^2}}.$$

Попробуем упростить это выражение. Поскольку $h\nu_0 \ll Am_p c^2$ (в этом можно убедиться, подставив конкретные значения),

$$h\nu \approx Am_p c^2 - Am_p c^2\left(1 - \frac{h\nu_0}{Am_p c^2}\right) = h\nu_0.$$

Это позволяет сделать такую замену:

$$|\vec{p}| = \frac{h\nu}{c} \approx \frac{h\nu_0}{c}.$$

Тогда окончательно

$$h\nu \approx h\nu_0 + \frac{(h\nu_0)^2}{2Am_p c^2},$$

и

$$\nu \approx \nu_0\left(1 + \frac{h\nu_0}{2Am_p c^2}\right).$$

К статье «Целые точки в многоугольниках и многогранниках»

(см. «Квант» № 4)

Упражнение 1. Очевидно, что $S(nF) = n^2S(F)$. Легко видеть, что $B(nF) = nB(F)$. Поэтому:

а) $N(nF) = S(nF) + B(nF)/2 + 1 = n^2S(F) + nB(F)/2 + 1$ и

б) $N(2F) - 2N(F) + 1 = [S(2F) + B(2F)/2 + 1] - 2[S(F) + B(F)/2 + 1] + 1 = 2S(F)$.

Упражнение 5. $N(3F) = 1 - 3N(F) + 3N(2F)$.

Упражнение 6. Из решения упражнения 1 вытекает, что $p(n) = n^2S(F) + nB(F)/2 + 1$. Поэтому $p(-n) = p(n) - nB(F) = N(nF) - B(nF)$, а эта разность и есть число внутренних це-

лых точек в многоугольнике nF (при $n \geqslant 1$).

Если F — целочисленный многогранник, то $N(nF) = a + bn + cn^2 + dn^3 = p(n)$ при $n \geqslant 0$. Оказывается, что при $n \geqslant 1$ число внутренних целых точек в многограннике nF равно $-p(-n)$.

Упражнение 7. Мы рассмотрим только случай, когда F, F_1 и F_2 — многогранники. Нужно доказать, что $B(F)+B(M)=B(F_1)+B(F_2)$.(*)

Если точка X лежит на границе F и не принадлежит F_2, то X дает вклад 1 в $B(F_1)$ и в $B(F)$. Если точка X лежит на границе M, то она дает вклад 1 в $B(F_1)$, $B(F_2)$, $B(F)$ и $B(M)$. Если точка X лежит внутри M, то она дает вклад 2 в $B(M)$ и вклад 1 в $B(F_1)$ и $B(F_2)$. Если X не принадлежит ни M, ни границе F, то она не дает вклада ни в одно из слагаемых формулы (*). Таким образом, любая точка X дает одинаковый вклад в обе части (*), т. е. эти части равны.

Упражнение 9. $N(4F) = 4N(3F) - 6N(2F) + 4N(F) - 1$.

Задача 1. Аналог теоремы 1: *число ненулевых решений системы трех уравнений с тремя неизвестными либо бесконечно, либо не превосходит 3!.(объем многогранника Ньютона этой системы).*

Задача 3. Пусть $g \in У'$. Существует удобная функция f такая, что $\vec{g} = \vec{f}$. Так как $f \in У$ и $У' \supset У$ согласно задаче 2, то функция $h = f - g$ принадлежит $У'$ и $\vec{h} = 0$. Однако при доказательстве основной теоремы мы пользовались только тем, что $h \in У'$. Значит, $h = 0$, $g = f \in У$, и ввиду произвольности g, $У' = У$.

Задача 5.

1) $N(nX_i) = C_{n+i-1}^{i-1}$, $1 \leqslant i \leqslant 4$.

2) $c_1 = -(n-1)(n-2)(n-3)/6$, $c_2 = n(n-2)(n-3)/2$, $c_3 = -n(n-1)(n-3)/2$, $c_4 = n(n-1)(n-2)/6$.

3) $N(nF) = N_n(F) = c_1 + c_2N(F) + c_3N(2F) + c_4N(3F)$, где c_1, c_2, c_3, c_4 — многочлены от n из 2).

4) Коэффициент при n^3 равен $V(F)$, а коэффициент при n^2 равен $B(F)/2 - 1$.

Задача 6. *План доказательства пространственной основной теоремы.*

Всюду ниже мы опускаем слово «целочисленный» и называем тетраэдром треугольную пирамиду.

Применяя последовательно допустимые преобразования, можно перевести:

1) любую точку в X_1;

2) любой отрезок I, для которого $N(I) = 2$, в X_2;

3) любой треугольник F, для которого $N(F) = 3$, в X_3;

4) любой тетраэдр F, для которого $N(F) = 4$ и $V(F) = 1/6$, в X_4;

5) любой тетраэдр F, для которого $N(F) = 4$, в тетраэдр T_n (см. «Квант», № 4, рис. 1 на с. 13), где $n = 6V(F)$.

Из 1)—4) и определения удобной функции следует, что h обращается в нуль на всех фигурах нулевого объема (поскольку $h(X_1) = h(X_2) = h(X_3) = 0$ — см. доказательство основной теоремы для плоских фигур) и на любом тетраэдре F, для которого $N(F) = 4$ и $V(F) = 1/6$ (поскольку $h(X_4) = 0$).

С помощью свойства А) получаем из 4), что h обращается в нуль на любом единичном кубе, и по индукции на любом прямоугольном параллелепипеде $\Pi_n = \{(x;\ y;\ z) : 0 \leqslant x \leqslant 1,\ 0 \leqslant y \leqslant 1,\ 0 \leqslant z \leqslant n\}$.

Параллелепипед Π_n можно разбить на тетраэдр T_n и некоторое число тетраэдров F_i, для которых $N(F_i) = 4$ и $V(F_i) = 1/6$. Поскольку $h(\Pi_n) = 0$, $h(F_i) = 0$, и h обращается в нуль на всевозможных пересечениях F_i между собой и с Π_n (эти пересечения — либо точка, либо отрезок, либо треугольник), то мы получаем из А), что h обращается в нуль и на T_n. Из 5) и определения удобной функции теперь следует, что h обращается в нуль на любом тетраэдре F, у которого $N(F) = 4$. Любой же тетраэдр, для которого $N(F) > 4$, можно разбить на два, три или четыре тетраэдра с числом целых точек, меньшим чем $N(F)$. По индукции получаем, что $h(F) = 0$ для любого тетраэдра F. Разбивая любой многогранник на тетраэдры, получаем из А) утверждение теоремы.

К задачам «Квант» для младших школьников»

(см. «Квант» № 4)

1. $15k+7$ копеек.

2. $\overline{\text{РЕКТОР}} = 530\,625$.

3. IV=I+V—II, X—I=IX, IV=V—I, X—IX=I, XXVI—XXV=I.

4. 32×24=768
   \+ \+ :
   144:24=6
   176—48=128.

К задачам

(см. «Квант» № 4, с. 12)

1. $S = Rr$. 2. $\sqrt{ab}/(a+b)$. 3. а) $x_1=2, y_1=0, z_1=5$; $x_2=5$, $y_2=0$, $z_2=2$; б) $x=6$; в) $x=7$, $y=8$. 4. Корней нет. Указание. Пусть S_{1976} — выражение в левой части уравнения, тогда $(x-1)^2 \cdot S_{1976} = 1977 \cdot x^{1978} - 1978 \cdot x^{1977} + 1$.

(см. «Квант» № 4, с. 23)

1. Сила трения колес о дорогу пропорциональна весу машины ($|\vec{F}_{\text{тр}}| = km|\vec{g}|$, где k — коэффициент трения, m — масса машины). Следовательно, ускорения, сообщаемые машинам, не зависят от их масс ($|\vec{a}| = k|\vec{g}|$) и одинаковы. Поэтому машины остановятся одновременно.

2. Коромысло рычажных весов следует делать такой конфигурации, чтобы при равных грузах на чашках сумма моментов сил тяжести, действующих на грузы, была равна нулю тогда и только тогда, когда коромысло находится в горизонтальном положении. Например, как на рисунке 4. В этом случае плечи p_1 и p_2 сил $\vec{F}_1$ и $\vec{F}_2$ равны $p_1 = p_2 = l_1 + l_2 \sin\alpha$. Если $\vec{F}_1 = \vec{F}_2$, то сумма моментов этих сил равна нулю.

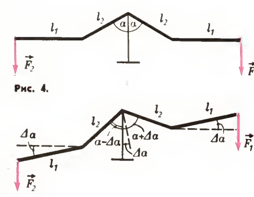


Рис. 4.

Рис. 5.

Предположнм, что при $\vec F_1 = \vec F_2$ коромысло отклонено от горнзонтального положення (рнс. 5). Тогда

$$p_1 = l_1 \cos\alpha + l_2 \sin(\alpha + \Delta\alpha),$$
$$p_2 = l_1 \cos\alpha + l_2 \sin(\alpha - \Delta\alpha).$$

Очевндно, $0 \leqslant \alpha - \Delta\alpha < \alpha + \Delta\alpha < \pi/2$, поэтому $\sin(\alpha - \Delta\alpha) < \sin(\alpha + \Delta\alpha)$. Следовательно, $p_1 > p_2$ н результнрующий момент стремнтся повернуть коромысло в горнзонтальное положение.

К головоломкам

«Машнниая графнка»

(*см. «Квант» № 4, с. 57*)

На рнсунке 1 (в задаче) — концентрнческие окружностн, вычерченные в перспективе с весьма блнзкой к ннм «точкн зрення». Как нзвестно, окружность в перспективе нзображается в внде эллнпса. Рисунок служнт напомнnаннем, что центр окружностн прн этом ие совпадает с центром изображаемого эллипса. «На прнроде» такой рисунок можно увндеть на пне — «годовые кольца» образуют как раз концентрнческне окружностн.

На рнсунке 2 — тоже несколько концентрнческих окружностей, вокруг внешней нз которых опнсан квадрат. Онн расположены во «фронтальной» (перед зрнтелем) плоскостн, но вычерчены в «цнлнндрнческой перспектнве», прнчем прн очень близком расположенин «точкн зрения». В такой проекцнн снимает известный многнм панорамный фотоаппарат «Горнзонт». Этнм фотоаппаратом, подойдя почтн вплотную, напрнмер, к длнnному железнодорожному вагону, можно снять его целнком, но прн этом он получнтся «нзогнутым», подобно тому, как нзогнуты на нашем чертеже крайнне лнннн, в натуре — стороны квадрата.

(*см. «Квант» № 4, 4-ю с. обл.*)

1. См. рнс. 6.
2. 8:2—1=3;
   2+7—4=5;
   4+6—3=7
   4—3+7=8.
3. См. рнс. 7.
4. 2/3+4/3=2;
   1/4+5/4+6/4=3;
   3/1+0/6+1/6+5/6=4;
   1/2+4/2+5/5+3/6+6/6=5;
   0/1+2/2+6/2+3/3+2/5+3/5=6;
   1/1+5/1+0/2+0/3+0/4+4/4+0/5=7.

6	2	1	1	5	2	6	1	1
5			5		5			4
6			3		5			2
1	4	5	0	5	4	6	0	0
0			1		4			3
2	4	3	5	4	0	1	3	3
2			6		2			2
2			4		3			4
1	3	6	0	0	0	3	6	6

Рис. 6.

	3	1	1	1		1	5	5	4	
5					6					4
3		6 6			0			6 5		1
3					0					1
0					4					0
	0	0	0	5		6	4	4	2	
0					5					4
2		5 5			2			6 3		4
2					2					4
6					2					3
	6	1	1	2		2	3	3	3	

Рис. 7.

(*см. «Квант» № 4, 3-ю с. обл.*)

«Куб-хамелеон»

Три двуцветных кубнка, на каждом нз которых красным, сннnм нлн зеленым цветом окрашены трн попарно смежные граннн, шесть кубнков с одной красной, двумя смежными сннnмн н тремя попарно смежнымн зеленымн гранямн, шесть кубнков с одной снней, двумя смежнымн зеленымн н тремя попарно смежнымн краснымн гранямн, шесть кубиков с одной зеленой, двумя смежнымн краснымн н тремя попарно смежнымн сннnмн гранямн, н, наконец, шесть кубнков с двумя смежнымн сннnмн гранямн, двумя смежнымн краснымн н двумя смежнымн зеленымн.

Номер готовили:
А. Виленкин, И. Клумова, Т. Петрова, В. Тихомирова, Ю. Шиханович

Номер оформили:
М. Дубах, Г. Красников, Э. Назаров, И. Смирнова

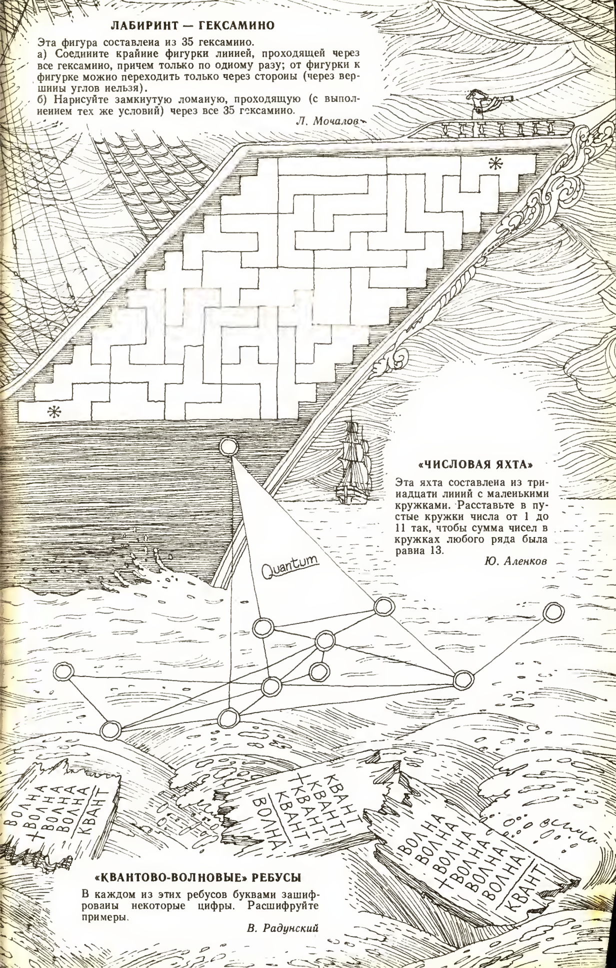
Зав. редакцией Л. Чернова

Художественный редактор Т. Макарова

Корректор Л. Сидоркина

113035, Москва, М-35, Б. Ордынка, 21/16. «Квант», тел. 231-83-62
Сдано в набор 25/II 1977 г.
Подписано в печать 6/IV 1977 г.
Бумага 70×108[1]/[16]. Физ. печ. л. 4
Усл. печ. л. 5,60. Уч.-изд. л. 6,55 Т-08404
Цена 30 коп. Заказ 319 Тираж 297 830 экз.

Чеховский полиграфический комбинат Союзполиграфпрома при Государственном комитете Совета Министров СССР по делам издательств, полиграфии и книжной торговли, г. Чехов Московской области



ЛАБИРИНТ — ГЕКСАМИНО

Эта фигура составлена из 35 гексамино.

а) Соедините крайние фигурки линией, проходящей через все гексамино, причем только по одному разу; от фигурки к фигурке можно переходить только через стороны (через вершины углов нельзя).

б) Нарисуйте замкнутую ломаную, проходящую (с выполнением тех же условий) через все 35 гексамино.

Л. Мочалов

«ЧИСЛОВАЯ ЯХТА»

Эта яхта составлена из тринадцати линий с маленькими кружками. Расставьте в пустые кружки числа от 1 до 11 так, чтобы сумма чисел в кружках любого ряда была равна 13.

Ю. Аленков

«КВАНТОВО-ВОЛНОВЫЕ» РЕБУСЫ

В каждом из этих ребусов буквами зашифрованы некоторые цифры. Расшифруйте примеры.

В. Радунский

Индекс 70465
Цена 30 коп.

К нашим читателям

Продолжается подписка на 1977 год на научно-популярный физико-математический журнал «Квант»

«Квант» адресован всем школьникам 5—10 классов, которые любят математику и физику, любят решать задачи и хотят в будущем серьезно заниматься точными науками.

Наш журнал полезен и тем школьникам, интерес которых к точным наукам еще дремлет.

На страницах нашего журнала публикуются статьи обзорного характера, рассказывающие о достижениях науки и о проблемах, еще ожидающих своего решения; рассказы об ученых, о том, как рождаются научные открытия.

В журнале читатель найдет много задач. Среди них — задачи различных олимпиад и просто интересные задачи.

Раздел «Лаборатория «Кванта»» рассказывает о поучительных экспериментах, которые можно осуществить в домашних условиях.

Какие вопросы и задачи могут ожидать абитуриента на вступительных экзаменах? Ответы на эти и многие другие вопросы, с которыми приходится сталкиваться при поступлении в вузы, читатель найдет в разделе «Практикум абитуриента».

Наш журнал полезен и учителям. Сейчас произведены коренные изменения в школьных курсах математики и физики. «Квант» всячески старается освещать на своих страницах эти изменения, публикуя статьи по новой программе.

В 1977 году «Квант» открыл новую рубрику: «По страницам школьных учебников». В статьях этого раздела разбираются наиболее тонкие и важные вопросы математики, изучаемой в школе.

В 1977 году значительно расширен раздел ««Квант» для младших школьников».

Журнал постоянно помещает рецензии на книги — уже вышедшие и еще только готовящиеся к изданию.

●

ЖУРНАЛ РАСПРОСТРАНЯЕТСЯ ТОЛЬКО ПО ПОДПИСКЕ

●

При подписке ссылайтесь на наш индекс 70465
Цена номера 30 коп.